Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

8. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 29 (Folgerungen des SGGZ, 4 = 1+1+1+1 Punkte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen.

(a) Sei $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie: Ist $\mathbb{E}|\log(X_1)| < \infty$ und $\mathbb{E}\log(X_1) \in (-\infty, 0)$, so gilt $M_n \to 0$ f.s.

(b) Es gelte $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Es bezeichne $\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ (wobei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$) die empirische Varianz. Zeigen Sie: $\hat{\sigma}_n^2 \to \mathrm{Var}(X_1)$ f.s.

(c) Seien $Y_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ weitere i.i.d. Zufallsvariablen, so dass $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig von $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist. Weiter gelte $X_1, Y_1 \sim U[0,1]$. Sei $A \subset \mathcal{B}_{[0,1]^2}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_A(X_i, Y_i) \to \lambda^2(A) \quad f.s.$$

(d) Ermitteln Sie

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n \text{ Integrale}} \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n.$$

Aufgabe 30 (Anwednung des SGGZ, 4 = 2 +1+1 Punkte).
Wir betrachten im Folgenden den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$. Eine Zahl $\omega = 0.\omega_1\omega_2\omega_3... \in [0,1)$ heißt *einfach normal*, falls für jede Ziffer $a \in \{0, ..., 9\}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k \in \{1,...,n\} : \omega_k = a\}}{n} = \frac{1}{10},$$

d.h. in der Dezimaldarstellung kommt sie mit Häufigkeit $\frac{1}{10}$ vor. Sei $A := \{\omega \in \Omega : \omega \text{ einfach normal}\} \in \mathcal{B}_{[0,1)}$. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Zufallsvariablen $X_k : \Omega \to \mathbb{R}, X_k(\omega) := \omega_k$ (k-te Dezimalstelle nach dem Komma).

(a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_n \in \{0, ..., 9\}$ gilt: $\mathbb{P}(X_1 = a_1, ..., X_n = a_n) = \frac{1}{10^n}$.

(b) Folgern Sie: $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist i.i.d. und geben Sie die Verteilung von X_1 an.
Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Familie $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ unabhängig ist.

(c) Folgern Sie mit dem starken GGZ: $\lambda(A) = 1$.

Aufgabe 31 (Alternatives SGGZ, 4 = 1+1+1+1 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_n = 0$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{n^2} < \infty.$$

Sei $S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i$. In dieser Aufgabe zeigen wir ein starkes GGZ $\frac{S_k}{k} \to 0$ f.s.

(a) Definiere $U_n := \max_{i=1,\dots,2^n} |S_i|$. Zeigen Sie: $\limsup_{k\to\infty} \frac{|S_k|}{k} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{U_n}{2^{n-1}}$.

(b) Zeigen Sie $\frac{U_n}{2^n} \to 0$ f.s.

(c) Folgern Sie: $\frac{S_k}{k} \to 0$ f.s.

(d) Sei nun $X_n \sim U[-n^\alpha, n^\alpha]$, wobei $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ f.s.

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 17. Juni 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`