Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

7. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 25 (Konvergenzbegriffe I, 6 = 2+2+2 Punkte).
Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Folgen von Zufallsvariablen, die jeweils wie unten gegeben sind. Untersuchen Sie X_n auf stochastische Konvergenz, fast sichere Konvergenz, Konvergenz im r-ten Mittel (alle $r \geq 1$). Geben Sie im Falle der Konvergenz den Limes an.

(a) $X_n(\omega) = \sqrt{n} \cdot \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n})}(\omega)$,

(b) $X_n(\omega) = (-1)^n \cdot \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2})}(\omega)$,

(c) $X_n = n \cdot W_{m(n),k(n)}$, wobei $m(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ (Abrunden), $k(n) = n - 2^{m(n)}$ und

$$W_{m,k}(x) := \mathbb{I}_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})}, \quad k = 0, ..., 2^m - 1.$$

Hinweis für die fast sichere Konvergenz: Für $x \in [0,1)$ gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $k(m) \in \{0, ..., 2^m - 1\}$ mit $x \in [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$. Betrachten Sie $X_{n(m)}$ mit $n(m) := 2^m + k(m)$.

Aufgabe 26 (Konvergenzbegriffe II, 4 = 2+2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen.

(a) Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^q] < \infty$ für ein $q > 0$. Zeigen Sie für $0 < r < q$:

(i) $\mathbb{E}[|X|^q] < \infty$,
Hinweis: Proposition 3.6 und Lemma von Fatou.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\mathbb{E}[|X_n - X|^r] \leq \mathbb{E}[|X_n - X|^q]^{r/q} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)^{\frac{q-r}{q}} + \varepsilon^r$,
Hinweis: Fügen Sie in den Erwartungswert $1 = \mathbb{I}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + \mathbb{I}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}$ ein und nutzen Sie die Hölder-Ungleichung.

(iii) $X_n \xrightarrow{(r)} X$.
Hinweis: Erst $n \to \infty$, dann $\varepsilon \to 0$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a - b|^q \leq 2^q(|a|^q + |b|^q)$.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$ der Wahrscheinlichkeitsraum aus A25, und $X_n(x) := n^{1/q} \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n})}(x)$. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen aus (a) erfüllt sind, aber $X_n \xrightarrow{(q)} 0$ nicht gilt. Es muss also wirklich $r < q$ gewählt werden.

Aufgabe 27 (Affentheater, 2* = 2* Bonuspunkte).

"Ein Affe, der rein zufällig auf einer Computertastatur tippt, wird irgendwann einmal auch Goethes Faust schreiben".

Formalisieren Sie diese Weisheit und geben Sie eine exakte mathematische Begründung mittels des Lemmas von Borel-Cantelli dafür, dass er dies mit Wahrscheinlichkeit Eins sogar unendlich oft tun wird (sofern er unendlich lange lebt).

Aufgabe 28 (Konvergenzbegriffe III, 4 = 1 + 1 + 1 + 1).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Seien $X_n \sim \operatorname{Exp}(1)$ ($n \in \mathbb{N}$) exponentialverteilt mit Parameter 1. Zeigen Sie:

  (i) $\frac{X_1}{\log(n)} \to 0$ f.s.

  (ii) $Y_n := \frac{X_n}{\log(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

  Sei X_n, $n \in \mathbb{N}$ nun zusätzlich unabhängig. Zeigen Sie:

  (iii) $\mathbb{P}(Y_n \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 1$. Folgern Sie: Es gibt keine ZV Y mit $Y_n \to Y$ f.s.

  (iv) $\mathbb{P}(Y_n \geq 1 + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Folgern Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n = 1 \quad f.s.$$

(b) Seien X_n i.i.d. und es gelte $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$. Zeigen Sie, dass $\min\{|X_1|, ..., |X_n|\} \to 0$ f.s.

(c) Seien X_n identisch verteilt und es gelte $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass $\frac{X_n}{n} \to 0$ f.s.

(d) Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$ unabhängig. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, aber nicht $X_n \to 0$ f.s.

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 10. Juni 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`