Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

6. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 21 (Satz von Fubini, 4 Punkte).
Wir betrachten die Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, wobei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gelte und sowohl μ_1 als auch μ_2 das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ bezeichnen. Weiterhin sei die messbare Funktion $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ gegeben durch

$$f(\omega_1, \omega_2) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega_1 = \omega_2 \\ -1, & \text{falls } \omega_1 = \omega_2 + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, \mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1$ sowie $\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, \mathrm{d}\mu_1 \right) \mathrm{d}\mu_2$ und zeigen Sie, welche Voraussetzungen des Satzes von Fubini verletzt sind.

Aufgabe 22 (Erwartungswerte, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}^X((-\infty, x])$.

(a) Sei $X \geq 0$. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}[X^\alpha] = \alpha \int_{(0,\infty)} x^{\alpha-1}(1 - F(x)) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Hierbei bezeichnet λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(b) Nun darf X auch negative Werte annehmen. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0,\infty)} (1 - F(x)) \, \mathrm{d}\lambda(x) - \int_{(-\infty,0]} F(x) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

(c) Sei F stetig. Zeigen Sie: $\int F(x) dF(x) = \frac{1}{2}$. Machen Sie das einmal

(i) unter Nutzung des Satzes von Fubini.
Hinweis: Leiten Sie die Gleichung $\int F(x) dF(x) = \int (1 - F(y)) dF(y)$ *her.*

(ii) indem Sie (ohne Beweis) die Regel $F(X) \sim U[0,1]$ nutzen (dies ist die so genannte *Probability integral transform*).
Hinweis: Nutzen Sie Satz 1.67 (Transformationsformel) einmal für X und einmal für $F(X)$.

Aufgabe 23 (Additive Faltung, 4 = 1 +1 + 1 + 1 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, $F_Y(y) := \mathbb{P}(Y \leq y)$.

(a) Zeigen Sie, dass $X + Y$ die folgende Verteilungsfunktion besitzt:

$$F_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z-y) \, \mathrm{d}F_Y(y).$$

Sei μ ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ und $\mathbb{P}^X \ll \mu$ mit Dichte f_X. Es gelte

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \quad \mu(B+y) = \mu(B) \quad \mathbb{P}^Y - \text{f.s.}$$

(b) Zeigen Sie mittels maßtheoretischer Induktion, dass für nichtnegative messbare numerische Funktionen $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ gilt:

$$\int h(x) d\mu(x) = \int h(x-y) d\mu(x) \quad \mathbb{P}^Y - \text{f.s.}$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass $\mathbb{P}^{X+Y} \ll \mu$ mit Dichte

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) \, \mathrm{d}F_Y(y).$$

(d) Seien nun $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda_X)$, $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_Y)$. Berechnen Sie die Verteilung von $X + Y$.
Hinweis: Nutzen Sie (c). Es gilt $\mathbb{P}^X \ll \mu_Z$ (μ_Z Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$) mit Dichte $f_X(x) = \frac{\lambda_X^x}{x!} e^{-\lambda_X} \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x)$.

Aufgabe 24 (Unabhängige Zufallsvariablen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Seien $X_1, X_2, X_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ gemeinsam unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $\sin(X_1)$, $X_3 - X_2$ unabhängig sind.

(b) Die Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ seien gemeinsam stetig verteilt, d.h. $\mathbb{P}^{(X,Y)} \ll \lambda^2 := \lambda \otimes \lambda$ mit Dichte $f_{X,Y}$. Bestimmen Sie in den folgenden beiden Fällen jeweils die Randdichten f_X, f_Y und entscheiden Sie, ob X, Y unabhängig sind.

(i) $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{I}_{[0,1]^2}(x,y)$,

(ii) $f_{X,Y}(x,y) = 2\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y \leq 1\}}$.

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 3. Juni 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`