Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

5. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 17 (Eigenschaften der Radon-Nikodym Dichte, $5 = 0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 1 + 1$).

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν, ν_1, ν_2 σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Es gelte $\nu, \nu_1, \nu_2 \ll \mu$. Zeigen Sie:

(a) $\frac{d\mu}{d\mu} = 1$ μ-f.s.

(b) Es sei $\rho \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$. Zeigen Sie, dass $\rho \ll \mu$ und $\frac{d\rho}{d\mu} = \frac{d\rho}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu}$ μ-f.s.

(c) Zeigen Sie, dass $\nu \ll \mu + \nu$. Berechnen Sie $\frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}$ in Termen von $f := \frac{d\nu}{d\mu}$.

(d) Es gilt $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$ und $\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$ $\mu -$ f.s.

(e) Falls auch $\mu \ll \nu$, so gilt $\frac{d\mu}{d\nu} = (\frac{d\nu}{d\mu})^{-1}$ $\nu -$ f.s. und $\mu -$ f.s.

Sei nun $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbar mit $\mathbb{E}|X| < \infty$. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

(f) Zeigen Sie, dass eine $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Abbildung $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall F \in \mathcal{F} : \quad \int_F X \, d\mathbb{P} = \int_F Z \, d\mathbb{P}.$$

Aufgabe 18 (Radon-Nikodym Dichten bekannter Maße, $4 = 2 + 2$ Punkte).

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

- $\mathbb{P}_1$ besitze die Dichte $f_1(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ bzgl. des Lebesgue-Maßes λ,
- $\mathbb{P}_2$ besitze die Dichte $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ bzgl. λ.

Gilt hier $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ bzw. $\mathbb{P}_2 \ll \mathbb{P}_1$? Berechnen Sie $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$.
Hinweis: Nutzen Sie Ergebnisse von Aufgabe 17 für die Berechung der Dichte.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$. Es seien $p \in (0,1)$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$. Für $i = 1,2$ seien $\mathbb{P}_i = \text{Bin}(m_i, p)$ Binomialverteilungen mit Dichten

$$f_i(x) = \binom{m_i}{x} p^x (1-p)^{m_i - x} \cdot \mathbb{I}_{\{0,1,\dots,m_i\}}(x)$$

bzgl. des Zählmaßes $\mu_Z(A) = |A|$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(i) Unter welchen Bedingungen an m_1, m_2 gilt $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$?

(ii) Geben Sie im Falle von $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ zwei verschiedene Dichten $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ an, die aber $\mathbb{P}_2$-f.s. gleich sind.

Aufgabe 19 (Voraussetzungen - Radon-Nikodym, 4 = 2 + 1 +1 Punkte).

Bekanntlich ist $\Omega := \mathbb{R}$ eine überabzählbare Menge. Unter "abzählbar" wollen wir im Folgenden "höchstens abzählbar" verstehen. Bekanntermaßen ist $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ eine σ-Algebra über Ω. Auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definieren wir Maße durch

$$\mu(A) := |A|, \qquad \nu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar}, \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ abzählbar}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\nu \ll \mu$.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Dichte f von ν bzgl. μ gibt.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe solch ein f, und nutzen Sie die Definition einer Dichte mit den Mengen $A = \{x\}$, $x \in \Omega$.

(c) Warum widersprechen die Resultate (a),(b) nicht dem Satz von Radon-Nikodym? Finden Sie die nicht erfüllte Voraussetzung und weisen Sie nach, dass diese nicht erfüllt ist.

Aufgabe 20 (Erwartungswerte, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, d.h. eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbare Abbildung.

(a) Sei $X \sim U[0,1]$, d.h. $\mathbb{P}^X$ besitze die Dichte $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ bzgl. des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(i) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}e^X$.

(ii) Welche Ungleichung der Vorlesung liefert $\exp(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}e^X$? Prüfen Sie nach, dass die Ungleichung hier erfüllt ist.

(b) Sei $X \sim \text{Bin}(1,p)$ mit $p \in (0,1)$, d.h. $\mathbb{P}^X$ besitze die Dichte $f(x) = (1-p)\mathbb{I}_{\{0\}}(x) + p\mathbb{I}_{\{1\}}(x)$ bzgl. des Zählmaßes μ_Z auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(i) Zeigen Sie (ohne die Verteilung von X zu nutzen) mit Hilfe der Hölder-Ungleichung, dass für alle $q \in \mathbb{R}, q > 1$ gilt: $\mathbb{E}|X| \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}|X|$ und $\mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$ und prüfen Sie nach, dass hier $\mathbb{E}|X| \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$ erfüllt ist.

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 27. Mai 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`