Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

4. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 13 (Rechenregeln für Maßintegrale, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein Messraum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbare Abbildung. Sei

$$\mu^X : \mathcal{B} \to [0, \infty], \quad \mu^X(B) := \mu(X^{-1}(B))$$

das von X induzierte Maß μ^X auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

(a) Sei weiter $h : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar numerisch und $\circ$ die Komposition. Zeigen Sie: Es gilt

$$\int (h \circ X) \, \mathrm{d}\mu = \int h \, \mathrm{d}\mu^X,$$

falls eines der beiden Integrale existiert.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage mittels maßtheoretischer Induktion.

(b) Sei $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar numerisch mit $\mu(\{X > 0\}) > 0$. Zeigen Sie:

$$\int_{\{X>0\}} X \, \mathrm{d}\mu > 0.$$

Aufgabe 14 (Parameterabhängige Integrale, 4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Sei $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

(1) Für jedes $x \in U$ ist $f(x, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar.

(2) Für μ-fast alle $\omega \in \Omega$ existiert die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} f(\cdot, \omega) : U \to \mathbb{R}$, und es gibt eine μ-integrierbare Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $\forall x \in U, \omega \in \Omega : |\frac{\partial}{\partial x} f(x, \omega)| \leq g(\omega)$.

Zeigen Sie: Für alle $x_0 \in U$ ist $x \mapsto \int f(x, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ differenzierbar in x_0 mit

$$\frac{\partial}{\partial x} \int f(x_0, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$$

Hinweis: Für eine beliebige reelle Folge $h_n \to 0$, schreiben Sie $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n,\omega)-f(x_0,\omega)}{h_n}$, nutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und den Satz von der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 15 (Konvergenzsätze, 4 = 2 + 1 +1 Punkte).

Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Weiterhin sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare Abbildungen.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz

$$(i) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)}\ \mathrm{d}\lambda(x), \qquad (ii) \quad \lim_{a\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k^a}$$

Hinweis: Sie dürfen für (ii) ohne Beweis annehmen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{\sqrt{k}} < \infty$.

(b) Sei $f_n(x) = n \cdot e^{-nx} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$. Zeigen Sie, dass eine $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit $f_n \to f$ λ-f.s., und zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \int f_n\ \mathrm{d}\lambda \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}\lambda$. Geben Sie an, welche Voraussetzung vom Satz der dominierten Konvergenz verletzt ist.

(c) Sei $f_n(x) = \frac{2+(-1)^n}{n} \cdot \mathbb{I}_{[0,n]}(x)$. Überprüfen Sie, welche der Ungleichungen

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\ \mathrm{d}\lambda \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}\lambda, \qquad \limsup_{n\to\infty} \int f_n\ \mathrm{d}\lambda \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}\lambda.$$

erfüllt sind. Geben Sie im Falle der Ungültigkeit an, welche Voraussetzung des Lemmas von Fatou verletzt sind.

Aufgabe 16 (Integrierbare Abbildungen, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Abbildungen $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei f_n μ-integrierbar mit $\int f_n\ \mathrm{d}\mu = 1$. Außerdem gelte $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast überall.

   (i) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel: Dann muss f nicht bereits μ-integrierbar sein. *Hinweis: Sie können z.B.* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ *wählen und sich von* $f_n(x) = \sin(x)\mathbb{I}_{[0,(2n-1)\pi]}(x)$ *inspirieren lassen.*

   (ii) Zeigen Sie: Falls alle f_n nichtnegativ sind, so ist f μ-integrierbar.

(b) Zeigen Sie: Ist f μ-integrierbar und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, dann gilt bereits

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\ \mathrm{d}\mu = 0.$$

Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass mit $B_N := \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \leq N\}$ *gilt:* $|\int_{A_n} f\ d\mu| \leq N \cdot \mu(A_n) + \int |f| \cdot \mathbb{I}_{B_N^c}\ d\mu$. *Führen Sie nun nacheinander* $\lim_{n\to\infty}$, $\lim_{N\to\infty}$ *aus.*

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 20. Mai 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`