Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

3. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 9 (Nachweis von Messbarkeit, 4 = 1 + 1 + 1 +1 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $X_r : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $r \in \mathbb{R}$ messbare numerische Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine messbare numerische Funktion (*ohne* Verwendung von P11(a)).
Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathcal{E} := \{[a, \infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt: $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(b) Die Ersteintrittszeit $\tau_B : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ in ein $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$\tau_B := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\}, \qquad \text{wobei wir setzen: } \inf \emptyset := \infty,$$

ist eine messbare numerische Funktion.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathcal{E}_2 := \{[-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt: $A(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(c) $\inf_{r\in\mathbb{R}} X_r : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist im Allgemeinen keine messbare numerische Funktion.
Hinweis: Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel wie folgt: Sei $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ und wählen Sie $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Definieren Sie für $r \in C$: $X_r = -\mathbb{I}_{\{r\}}$ und für $r \notin C$: $X_r = 0$.

(d) Ist für alle $\omega \in \Omega$ die Abbildung $r \mapsto X_r(\omega)$ stetig, so ist $\inf_{r\in\mathbb{R}} X_r : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion.
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Folgenstetigkeit, dass $\inf_{r\in\mathbb{R}} X_r = \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q$.

Aufgabe 10 (Spur-σ-Algebra, 4 = 2 + 1 +1 Punkte).
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ Messräume und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung. Für ein $A \in \mathcal{A}$ bezeichne $X|_A : A \to \mathcal{X}, \omega \mapsto X(\omega)$ die Einschränkung von X auf A und $\mathcal{A}|_A := \mathcal{A} \cap A = \{C \cap A : C \in \mathcal{A}\}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ über A.

(a) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine höchstens abzählbare Folge disjunkter Mengen mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$X : \Omega \to \mathcal{X} \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B})\text{-messbar} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N} : X|_{A_i} : A_i \to \mathcal{X} \quad (\mathcal{A}|_{A_i}, \mathcal{B})\text{-messbar}.$$

Es seien nun (Ω, d) und $(\mathcal{X}, \rho)$ metrische Räume. Die Borelsche σ-Algebra auf Ω ist definiert durch $\mathcal{B}_\Omega := A(\{A \subset \Omega : A \text{ offen in } (\Omega, d)\})$.
Sei $A \subset \Omega$. Mit der eingeschränkten Metrik $d|_{A\times A}$ wird A wieder zu einem metrischen Raum, wobei die offenen Mengen durch $\{B \cap A : B \text{ offen in } (\Omega, d)\}$ gegeben sind.

(b) Zeigen Sie: $\mathcal{B}_A = \mathcal{B}_\Omega|_A$. *Hinweis: Die linke Seite ist die Borelsche σ-Algebra über A, die rechte Seite die Spur-σ-Algebra von $\mathcal{B}_\Omega$. Nutzen Sie Blatt 1, A4(a).*

(c) Die Einschränkung $X|_A : A \to \mathcal{X}$ sei stetig. Zeigen Sie: $X|_A$ ist $(\mathcal{B}_\Omega|_A, \mathcal{B}_\mathcal{X})$-messbar.

Aufgabe 11 (Messbarkeit von reellwertiger Funktionen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).
In dieser Aufgabe betrachten wir Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiere

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar ist, indem Sie jeweils einmal

  (i) die Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(x^{-1})\mathbb{I}_{[-\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{n\pi}]^c}(x)$ nutzen.

  (ii) und einmal Aufgabe 10(a),(c) nutzen.

(b) Zeigen Sie, dass g $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar ist, indem Sie g als Limes primitiver Funktionen darstellen.

(c) Sei h überall differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Ableitung $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar ist.

Aufgabe 12 (Definition des Maßintegrals, 4* = 1* + 1* + 1* +1* Bonuspunkte).
In dieser Aufgabe berechnen wir ein Maßintegral $\int f d\lambda$ auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ ausgestattet mit dem Lebesgue-Maß λ mit Hilfe der Definition.
Sei eine $\mathcal{B}_\mathbb{R} - \mathcal{B}_\mathbb{R}$-messbare Funktion gegeben durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - |x|$.

(a) Ermitteln Sie Positiv- und Negativteil f^+, f^-.

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $f_n^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n^+(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{\frac{j-1}{2^n} \leq f^+(x) < \frac{j}{2^n}\}} + n\mathbb{I}_{\{f^+(x) \geq n\}}$$

primitive Funktionen mit $f_n^+ \uparrow f^+$ sind. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ die Abbildung f_n^+ in der Form $f_n^+(x) = \sum_{j=1}^k y_j \mathbb{I}_{A_j}(x)$ mit expliziten $y_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ an.

(c) Ermitteln Sie $\int f_n^+ d\lambda$ mit Hilfe der Definition des Maßintegrals.

(d) Ermitteln Sie $\int f^+ d\lambda$ und geben Sie (ohne detaillierte Rechnung für f^-) den Wert $\int f d\lambda$ an.

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 29. April 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`