Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

2. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 5 (Elementare Eigenschaften von Maßen, 4 = 0.5 + 0.5 + 1 + 0.5 + 0.5 +1 Punkte).

Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist. Zeigen Sie:

(a) Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A \cap B) < \infty$ gilt $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
Bemerkung: Achtung! Es gilt also im Allgemeinen nicht $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(b) Zeigen Sie die *Modularität:* Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(c) *Stetigkeit von unten*: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow$, so gilt: $\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(d) *Monotonie:* Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt: $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(e) *σ-Subadditivität:* Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, so gilt: $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

(f) Auf die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ bei der *Stetigkeit von oben* kann nicht verzichtet werden: Geben Sie ein Beispiel für $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow$, so dass $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
Hinweis: Sie können zum Beispiel $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *und* $\mu(A) = |A|$ *wählen.*

Aufgabe 6 (Translationsinvariante Maße, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Es bezeichne $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Es sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$: $\mu((a, b]) < \infty$. Weiterhin sei μ translationvariant, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}: \quad \mu(A + c) = \mu(A). \qquad A + c := \{a + c : a \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $q \in \mathbb{Q}, q > 0$ gilt $\mu((0, q]) = q \cdot \mu((0, 1])$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $\mu((a, b]) = (b - a) \cdot \mu((0, 1])$.

(c) Es existiert eine Konstante $c_\mu \geq 0$, so dass $\mu = c_\mu \cdot \lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ bezeichnet. Geben Sie c_μ in Termen von μ an.

Aufgabe 7 (Maßfortsetzungssatz, 4 = 2 + 2 Punkte).

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit Satz 1.21 (Maßfortsetzungssatz - Eindeutigkeit) der Vorlesung.

(a) Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$ und $\mathcal{E} = \{A, C\}$ mit $A = \{a, b\}$ und $C = \{b, c\}$. Zeigen Sie $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ und dass zwei nicht-identische Wahrscheinlichkeitsmaße μ_i auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ existieren mit

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Warum ist Satz 1.21 hier nicht anwendbar?

Hinweis: Man kann zum Beispiel $\mu_1(A) = \frac{1}{4}|A|$ definieren. Hierbei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente von A.

(b) Sei nun $\Omega = \mathbb{Z}$, $E_n = (-\infty, n] \cap \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{E} = \{E_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ und dass zwei nicht-identische σ-endliche Maße μ_i auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ existieren mit

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Woran scheitert hier die Anwendbarkeit von Satz 1.21?

Hinweis: Man kann zum Beispiel $\mu_1(A) = |A|$ definieren.

Aufgabe 8 (Rechnen mit bekannten Maßen, 4 = 1 + 1 + 1 +1 Punkte).

Für ein W-Maß μ definiere $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie: F_μ ist eine Verteilungsfunktion.

(b) Es bezeichne μ_F das eindeutig bestimmte Lebesgue-Stieltjes-Maß zu einer Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass für jedes W-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ und jede Verteilungsfunktion F gilt: $\mu_{(F_\mu)} = \mu$ sowie $F_{(\mu_F)} = F$.

(c) Gegeben seien die Lebesgue-Stieltjes-W-Maße μ_{F_i}, $i = 1, 2$ zu $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-y} \mathbb{I}_{\{y \geq 0\}} dy$, $F_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mathbb{I}_{[k,\infty)}(x)$. Berechnen Sie $\mu_{F_i}([3, 5])$ und $\mu_{F_i}(\{1, 3\})$ für $= 1, 2$. *Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis: $\forall a, b \in \mathbb{R} : \mu_F([a, b]) = F(b) - \lim_{x \uparrow a} F(a)$ und $\mu_F(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \uparrow a} F(a)$. (Folgt aus Stetigkeit des Maßes von oben).*

(d) Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ und μ_Z das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Berechnen Sie

$$\lambda((0, 1] \cup (2, 3]), \quad \lambda((1, 2)), \quad \lambda((-\infty, 0]), \quad \lambda(\{0\}), \quad \lambda(\mathbb{Q}), \quad \lambda([0, 1] \backslash \mathbb{Q}).$$

und

$$\mu_Z(\{1, 2, 3\}), \quad \mu_Z(\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}).$$

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 6. Mai 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`