Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

12. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 45 (Charakteristische Funktionen I, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $X \sim \text{Geo}(p)$ mit $p \in (0,1)$, wobei $\text{Geo}(p)$ die Dichte $f(k) = p \cdot (1-p)^k \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(k)$ bzgl. des Zählmaßes μ_Z auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ besitzt.

  (i) Berechnen Sie die charakteristische Funktion ϕ_X.

  (ii) Für X ist bekannt, dass $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Ermitteln Sie mit der Momentenformel $\mathbb{E}X$.

(b) Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

  (i) Ermitteln Sie ϕ_X.
  Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) < 0$ gilt: $\int_0^\infty e^{xz} dx = -\frac{1}{z}$.

  (ii) Für X ist bekannt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Zeigen Sie mit der Momentenformel, dass $\mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$.

Aufgabe 46 (Charakteristische Funktionen II, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Sei $N : \Omega \to \mathbb{N}$ eine von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariable.

(a) Sei X_n, $n \in \mathbb{N}$ i.i.d. und $X := \sum_{i=1}^N X_i$. Zeigen Sie dass die charakteristische Funktion von X gegeben ist durch
$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[\phi_{X_1}(t)^N].$$

(b) Sei $X_1 \sim \text{Bin}(1,p)$ Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$ und $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie mittels (a), dass $X \sim \text{Poi}(\lambda p)$.

(c) Seien nun $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängig mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Ermitteln Sie $\phi_{X_1+X_2}$ und daraus die Verteilung von $X_1 + X_2$.

Aufgabe 47 (Schwache Konvergenz I, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\delta_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(\delta_1 = 1) = \mathbb{P}(\delta_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Sei $X_n = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{2^i}$.

(a) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion von X_n durch

$$\phi_{X_n}(t) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin(t)}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \quad (t \neq 0), \qquad \phi_{X_n}(0) = 1$$

gegeben ist.
Hinweis: Nutzen Sie die Regel $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ *für* $x \in \mathbb{R}$. *Es entsteht ein Teleskopprodukt.*

(b) Sei $X \sim U[-1,1]$ eine auf $[-1,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie $\phi_X(t)$ und zeigen Sie, dass für X_n aus (a) gilt: $X_n \xrightarrow{D} X$.

Aufgabe 48 (Schwache Konvergenz II, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen.

(a) Seien $Y_n \sim \mathrm{Geo}(p_n)$ geometrisch verteilt mit Parametern $p_n \in (0,1)$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} np_n \to c \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass $\frac{Y_n}{n}$ schwach konvergiert und bestimmen Sie den Limes.
Hinweis: Es ist $\lim_{n\to\infty} n \cdot (e^{x/n} - 1) = x$ *für* $x \in \mathbb{C}$. *Nutzen Sie die charakteristischen Funktionen aus A45.*

(b) Seien $Y_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$ exponentialverteilt, wobei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen ist.

  (i) Es gelte $\lambda_n \to \lambda \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: $Y_n \xrightarrow{D} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

  (ii) Es gelte $\lambda_n \to 0$. Zeigen Sie mittels der Definition: $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht straff. Folgern Sie: Y_n konvergiert nicht in Verteilung.

  (iii) Wogegen konvergiert Y_n für $\lambda_n \to \infty$?

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 15. April 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`