Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

11. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 41 (Martingal I, 4 = 1 + 1 + 1 + 1).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\varepsilon_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$. Seien $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ und

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_k, \quad S_0 := 0, \qquad M_n := \exp(S_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2).$$

Zeigen Sie:

(a) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$.
Hinweis: Für $Y_1 \sim N(0,\sigma_1^2)$, $Y_2 \sim N(0,\sigma_2^2)$ unabhängig und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}\exp(Y_1) = \exp(\frac{\sigma_1^2}{2})$ und $a_1Y_1 + a_2Y_2 \sim N(0, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Zufallsvariable $M_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit $M_n \to M_\infty$ f.s.

Gelte nun $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \infty$.

(c) Zeigen Sie, dass $M_\infty = 0$ f.s.
Hinweis: Zeigen Sie elementar mit der Definition, dass $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(d) Ist $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar? Gilt $M_n \xrightarrow{(1)} M$ mit einer Zufallsvariablen $M : \Omega \to \mathbb{R}$?
Hinweis: Aus $M_n \xrightarrow{(1)} M$ folgt $\mathbb{E}M_n \to \mathbb{E}M$.

Aufgabe 42 (Martingal II, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Zufallsvariablen. Definiere $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_k : k \leq n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{E}Y_n = 0, \mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$. Zeigen Sie:

$$\forall x > 0 : \quad \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Y_k > x\right) \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{\mathbb{E}[Y_n^2] + x^2}$$

Hinweis: Wenden Sie die Funktion $\phi(x) = (x+c)^2$ mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$ auf beiden Seiten der Ungleichung in $\mathbb{P}(\cdot)$ an. Nutzen Sie dann A37(b) (warum wird die Voraussetzung ϕ monoton wachsend nicht benötigt?) und die Doob-Ungleichung.

(b) Nun sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i.i.d. und es gelte $\mathbb{P}(Y_0 = 4) = \mathbb{P}(Y_0 = 0) = \mathbb{P}(Y_0 = -1) = \frac{1}{3}$. Definiere $X_n := \prod_{i=1}^n Y_i$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist, aber $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ = \infty$ gilt (und somit der Martingalkonvergenzsatz nicht anwendbar ist).
Hinweis: Nutzen Sie $\mathbb{E}X_n^+ \geq \mathbb{E}[X_n^+ \mathbb{I}_A]$ *mit* $A = \bigcap_{i=1}^n \{Y_i = 4\}$.

Aufgabe 43 (Martingal III, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$D_n := M_n - M_{n-1}$$

die zugehörige Martingaldifferenzenfolge.

(a) Es gelte $\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[D_k^2]}{k^2} < \infty$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n D_k \to 0$ f.s.
Hinweise:

- *Wenden Sie den Martingalkonvergenzsatz auf* $X_n := \sum_{k=1}^n \frac{D_k}{k}$ *an. Verwenden Sie danach ohne Beweis Kroneckers Lemma: Sind* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei reellwertige Folgen und* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nichtnegativ und monoton wachsend gegen* ∞, *dann gilt: Ist* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} = z \in \mathbb{R}$, *so ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n x_k = 0$.
- *Nutzen und begründen Sie die Ungleichung* $\mathbb{E}[X_n^+] \leq \mathbb{E}[X_n^2]^{1/2}$ *sowie A37(c).*

(b) Folgern Sie mittels (a) die Variante des starken Gesetzes der großen Zahlen: Seien $\varepsilon_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\varepsilon_k = 0$ und $\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_k^2]}{k^2} < \infty$. Dann gilt $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \to 0$ f.s.

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 29. April 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`