Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

1. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 1 (Elementare Eigenschaften von σ-Algebren, 4 = 1 + 1 + 1 + 0.5 + 0.5 Punkte).
Seien $\Omega, \mathcal{X}$ nichtleere Mengen und I eine beliebige Indexmenge.

(a) Seien $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, σ-Algebren über Ω. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ-Algebra über Ω ist.

(b) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren über Ω. Geben Sie durch explizite Wahl von $\Omega, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ ein Gegenbeispiel an, dass $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ im Allgemeinen keine σ-Algebra mehr ist.

(c) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $f : \mathcal{X} \to \Omega$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra (die so genannte Urbild-σ-Algebra unter f) über $\mathcal{X}$ ist.

(d) Es sei $f : \mathcal{X} \to \Omega$ eine Abbildung und $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra über $\mathcal{X}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : f^{-1}(A) \in \mathcal{C}\}$$

eine σ-Algebra (die so genannte Bild-σ-Algebra) über Ω ist.

(e) Sei $T \subset \Omega$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_T := \{A \cap T : A \in \mathcal{A}\}$ (die so genannte Spur-σ-Algebra) eine σ-Algebra über T ist.

Aufgabe 2 (Beispiele für Algebren und σ-Algebren, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei Ω eine nichtleere Menge.

(a) Ermitteln Sie jeweils $A(\mathcal{E})$ in den folgenden Beispielen, indem Sie alle Elemente von $A(\mathcal{E})$ explizit angeben (dann ist kein weiterer Nachweis erforderlich) oder eine allgemeine Form ermitteln, die alle Elemente charakterisiert.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.
- $\Omega = (0, 4] \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{E} = \{(0, 3], (1, 4]\}$.

- $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, ..., k\} : k \in \mathbb{N}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$
eine σ-Algebra über Ω ist.
Hinweis: Mit 'abzählbar' meinen wir 'höchstens abzählbar', d.h. auch endliche Mengen sind abzählbar. Sie dürfen nutzen, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.

Aufgabe 3 (Borelsche σ-Algebra, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} := A(\mathcal{E}_B)$ mit $\mathcal{E}_B := \{U \subset \mathbb{R} : U \text{ offen}\}$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass
$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = A(\mathcal{E}), \qquad \mathcal{E} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Hinweis für '$\subset$': Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann existiert zu jedem $x \in U$ ein $r_x > 0$ mit $(x - r_x, x + r_x) \subset U$. Argumentieren Sie mit der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ um $q_x \in \mathbb{Q}$, $s_x \in \mathbb{Q}$ zu finden mit $x \in (q_x - s_x, q_x + s_x) \subset U$. Nutzen Sie dann die Darstellung $U = \bigcup_{x \in U}(q_x - s_x, q_x + s_x)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass gilt: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = A(\mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$, wobei

- $\mathcal{E}_1 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{E}_2 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{E}_3 = \{(-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}\}$.

Hinweis: Nutzen Sie folgende Regel für Mengensysteme $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$: Gilt $\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}')$, so folgt bereits $A(\mathcal{E}) \subset A(\mathcal{E}')$.

Aufgabe 4 (Beweise mit σ-Algebren, 4 = 2.5 + 1.5 Punkte).
Seien Ω, Ω' nichtleere Mengen und $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ σ-Algebren über Ω bzw. Ω'.

(a) Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega')$. Zeigen Sie, dass dann gilt:
$$A(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(A(\mathcal{E})).$$
(Notation wie in Aufgabe 1(c)). *Hinweise:*

- *'$\subset$': Zeigen Sie: 1) $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(A(\mathcal{E}))$ und 2) $f^{-1}(A(\mathcal{E}))$ ist eine σ-Algebra.*
- *'$\supset$': Definieren Sie $\mathcal{C} := \{C \in A(\mathcal{E}) : f^{-1}(C) \in A(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$. Zeigen Sie 1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ und 2) $\mathcal{C}$ ist σ-Algebra.*

(b) Sei $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere
$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + c := \{B + c : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}, \quad \text{wobei} \quad B + c := \{b + c : b \in B\}$$
(Verschiebung aller Mengen in der Borelschen σ-Algebra um c). Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + c = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
Hinweis: Verwenden Sie (a). Finden Sie dazu ein geeignetes f mit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + c = f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 29. April 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`