Prof. Dr. Rainer Dahlhaus, Dr. Stefan Richter
Wahrscheinlichkeitstheorie 1
Sommersemester 2020

Aufgabensammlung komplett - mit Lösungen

1 Aufgaben

Aufgabe 1.
Seien $\Omega, \mathcal{X}$ nichtleere Mengen und I eine beliebige Indexmenge.

(a) Seien $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, σ-Algebren über Ω. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ-Algebra über Ω ist.

(b) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren über Ω. Geben Sie durch explizite Wahl von $\Omega, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ ein Gegenbeispiel an, dass $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ im Allgemeinen keine σ-Algebra mehr ist.

(c) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $f : \mathcal{X} \to \Omega$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra (die so genannte Urbild-σ-Algebra unter f) über $\mathcal{X}$ ist.
Hinweis: Sie können ohne Beweis nutzen, dass für $A, A_i \subset \Omega$ ($i \in I$) gilt: $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$, $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

Aufgabe 2.
Sei Ω eine nichtleere Menge.

(a) Ermitteln Sie jeweils $A(\mathcal{E})$ in den folgenden Beispielen, indem Sie alle Elemente von $A(\mathcal{E})$ explizit angeben (dann ist kein weiterer Nachweis erforderlich) oder eine allgemeine Form ermitteln, die alle Elemente charakterisiert.

- $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1,2\},\{1,2,3,4\}\}$.
- $\Omega = (0,4] \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{E} = \{(0,3],(1,4]\}$.
- $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{E} = \{\{1,...,k\} : k \in \mathbb{N}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra über Ω ist.
Hinweis: Mit 'abzählbar' meinen wir 'höchstens abzählbar', d.h. auch endliche Mengen sind abzählbar. Sie dürfen nutzen, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.

Aufgabe 3.
Sei $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} := A(\mathcal{E}_B)$ mit $\mathcal{E}_B := \{U \subset \mathbb{R} : U \text{ offen}\}$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = A(\mathcal{E}), \qquad \mathcal{E} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Hinweis für '$\subset$': Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann existiert zu jedem $x \in U$ ein $r_x > 0$ mit $(x - r_x, x + r_x) \subset U$. Argumentieren Sie mit der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ um $q_x \in \mathbb{Q}$, $s_x \in \mathbb{Q}$ zu finden mit $x \in (q_x - s_x, q_x + s_x) \subset U$. Nutzen Sie dann die Darstellung $U = \bigcup_{x\in U}(q_x - s_x, q_x + s_x)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass gilt: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = A(\mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$, wobei

- $\mathcal{E}_1 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{E}_2 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{E}_3 = \{(-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}\}$.

Hinweis: Nutzen Sie folgende Regel für Mengensysteme $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$: Gilt $\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}')$, so folgt bereits $A(\mathcal{E}) \subset A(\mathcal{E}')$.

Aufgabe 4.

Seien Ω, Ω' nichtleere Mengen und $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ σ-Algebren über Ω bzw. Ω'.

(a) Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega')$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$A(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(A(\mathcal{E})).$$

(Notation wie in Aufgabe 1(c)). *Hinweise:*

- *'$\subset$': Zeigen Sie: 1) $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(A(\mathcal{E}))$ und 2) $f^{-1}(A(\mathcal{E}))$ ist eine σ-Algebra.*
- *'$\supset$': Definieren Sie $\mathcal{C} := \{C \in A(\mathcal{E}) : f^{-1}(C) \in A(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$. Zeigen Sie 1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ und 2) $\mathcal{C}$ ist σ-Algebra.*

(b) Sei $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + c := \{B + c : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}, \quad \text{wobei} \quad B + c := \{b + c : b \in B\}$$

(Verschiebung aller Mengen in der Borelschen σ-Algebra um c). Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + c = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
Hinweis: Verwenden Sie (a). Finden Sie dazu ein geeignetes f mit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + c = f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Aufgabe 5.

Seien $\Omega, \mathcal{X}$ nichtleere Mengen.

(a) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel: Im Allgemeinen ist der Schnitt zweier Semialgebren auf Ω nicht notwendig wieder eine Semialgebra.
Bemerkung: Deswegen gibt es im Allgemeinen keine von einem Mengensystem erzeugte Semialgebra.

(b) Es sei $f : \mathcal{X} \to \Omega$ eine Abbildung und $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra über $\mathcal{X}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : f^{-1}(A) \in \mathcal{C}\}$$

eine σ-Algebra (die so genannte Bild-σ-Algebra) über Ω ist.

(c) Sei $T \subset \Omega$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_T := \{A \cap T : A \in \mathcal{A}\}$ (die so genannte Spur-σ-Algebra) eine σ-Algebra über T ist.

Aufgabe 6.

Zu Bestimmen ist je nach Aufgabe die erzeugte Algebra oder σ-Algebra.

(a) Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie $A(\{B_1, B_2\})$ über Ω im Falle

- $B_1 = \{1, 2\}$ und $B_2 = \{2, 3\}$,
- $B_1 = \{1, 2, 3\}$ und $B_2 = \{2, 3\}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ und $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$. Sei $\mathcal{E} = \{A \subset \Omega : |A| = 2\}$. Ermitteln Sie $A(\mathcal{E})$.

(c) Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{E} = \{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{N}\}$. Ermitteln Sie $G(\mathcal{E})$.

Aufgabe 7.
Sei $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{B}_\mathbb{R} := A(\mathcal{E}_B)$ mit $\mathcal{E}_B := \{U \subset \mathbb{R} : U \text{ offen}\}$. Aus Übungsblatt 1, A3 ist außerdem bekannt, dass

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} = A(\mathcal{E}), \qquad \mathcal{E} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathcal{B}_\mathbb{R} = A(\mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$, wobei

- $\mathcal{E}_1 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathcal{E}_3 = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ist kompakt}\}$.

Hinweis: Nutzen Sie folgende Regel für Mengensysteme $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$: Gilt $\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}')$, so folgt bereits $A(\mathcal{E}) \subset A(\mathcal{E}')$.

Aufgabe 8.
Sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{A} = A(\mathcal{E})$.

(a) Sei $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Definiere

$$c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R} := \{c \cdot B : B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}, \quad \text{wobei} \quad c \cdot B := \{c \cdot b : b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_\mathbb{R} = c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$.
Hinweise: Nutzen Sie die Darstellung $\mathcal{B}_\mathbb{R} = A(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

- *'$\subset$': Zeigen Sie: 1) $\mathcal{E} \subset c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$ und 2) $c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$ ist eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$.*
- *'$\supset$': Definieren Sie $\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : c \cdot B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}$. Zeigen Sie 1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ und 2) $\mathcal{C}$ ist σ-Algebra über $\mathbb{R}$.*

(b) Zeigen Sie: Gilt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$, so existiert für beliebige $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ mit $\omega \neq \tilde{\omega}$ ein $E \in \mathcal{E}$ mit $\mathbb{I}_E(\omega) \neq \mathbb{I}_E(\tilde{\omega})$.
Hinweis: Nutzen Sie einen Beweis durch Widerspruch. Definieren Sie für $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ mit $\omega \neq \tilde{\omega}$ das Mengensystem $\mathcal{B} := \{A \in A(\mathcal{E}) : \omega, \tilde{\omega} \in A \text{ oder } \omega, \tilde{\omega} \in A^c\}$. Zeigen Sie dann: 1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$, 2) $\mathcal{B}$ ist eine σ-Algebra. Folgern Sie $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ und finden Sie den Widerspruch.

Aufgabe 9.
Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist. Zeigen Sie:

(a) *Monotonie:* Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt: $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) *σ-Subadditivität:* Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, so gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

(c) Auf die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ bei der *Stetigkeit von oben* kann nicht verzichtet werden: Geben Sie ein Beispiel für $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow$, so dass $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
Hinweis: Sie können zum Beispiel $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *und* $\mu(A) = |A|$ *wählen.*

Aufgabe 10.

Es bezeichne $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Es sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$: $\mu((a, b]) < \infty$. Weiterhin sei μ translationvariant, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}: \quad \mu(A + c) = \mu(A). \qquad A + c := \{a + c : a \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $q \in \mathbb{Q}, q > 0$ gilt $\mu((0, q]) = q \cdot \mu((0, 1])$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $q = \frac{m}{n}$ *mit* $m, n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $n \cdot \mu((0, \frac{m}{n}]) = \mu((0, m]) = m \cdot \mu((0, 1])$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $\mu((a, b]) = (b - a) \cdot \mu((0, 1])$.
Hinweis: Nutzen Sie $\mu((a, b]) = \mu((0, b-a])$ *und die Stetigkeit des Maßes von oben, indem Sie* $(b - a) \in \mathbb{R}$ *durch eine Folge rationaler Zahlen approximieren.*

(c) Es existiert eine Konstante $c_\mu \geq 0$, so dass $\mu = c_\mu \cdot \lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ bezeichnet. Geben Sie c_μ in Termen von μ an.
Hinweis: Maßfortsetzungssatz 1.21(a). Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $A \mapsto c_\mu \cdot \lambda(A)$ *ein Maß auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ *ist.*

Aufgabe 11.

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit Satz 1.21 (Maßfortsetzungssatz - Eindeutigkeit) der Vorlesung.

(a) Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$ und $\mathcal{E} = \{A, C\}$ mit $A = \{a, b\}$ und $C = \{b, c\}$. Zeigen Sie $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ und dass zwei nicht-identische Wahrscheinlichkeitsmaße μ_i auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ existieren mit

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Warum ist Satz 1.21 hier nicht anwendbar?
Hinweis: Man kann zum Beispiel $\mu_1(A) = \frac{1}{4}|A|$ *definieren. Hierbei bezeichnet* $|A|$ *die Anzahl der Elemente von* A.

(b) Sei nun $\Omega = \mathbb{Z}$, $E_n = (-\infty, n] \cap \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{E} = \{E_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ und dass zwei nicht-identische σ-endliche Maße μ_i auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ existieren mit

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Woran scheitert hier die Anwendbarkeit von Satz 1.21?
Hinweis: Man kann zum Beispiel $\mu_1(A) = |A|$ *definieren.*

Aufgabe 12.

Eine *Verteilungsfunktion* auf $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) F ist monoton nicht fallend, (2) F ist rechtsseitig stetig, (3) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Für ein W-Maß μ definiere $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie: F_μ ist eine Verteilungsfunktion.
Hinweis: Wenn Sie (1) gezeigt haben, dürfen Sie bei den in (2),(3) auftretenden Folgen Monotonie annehmen. Um z.B. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ *zu zeigen, muss also nur für monoton wachsende Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_n \uparrow \infty$ *gezeigt werden, dass* $F(x_n) \to 1$.

(b) Es bezeichne μ_F das eindeutig bestimmte Lebesgue-Stieltjes-Maß zu einer Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass für jedes W-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ und jede Verteilungsfunktion F gilt:

$$\mu_{(F_\mu)} = \mu, \qquad F_{(\mu_F)} = F.$$

Bemerkung: Das bedeutet, die Abbildungen $\mu \mapsto F_\mu$ *und* $F \mapsto \mu_F$ *sind zueinander invers und definieren eine Bijekton zwischen der Menge der Verteilungfunktionen und der Menge der W-Maße auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(c) Gegeben seien die Lebesgue-Stieltjes-W-Maße μ_{F_i}, $i = 1, 2$ zu $F_1(x) = \int_{-\infty}^x e^{-y}\mathbb{I}_{\{y\geq 0\}}dy$, $F_2(x) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\mathbb{I}_{[k,\infty)}(x)$. Berechnen Sie

$$\mu_{F_i}([3, 5]), \qquad \mu_{F_i}(\{1, 3\}), \quad i = 1, 2.$$

Aufgabe 13.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

(a) Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A \cap B) < \infty$ gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
Bemerkung: Achtung! Es gilt also im Allgemeinen nicht $\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(b) Zeigen Sie die *Modularität:* Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(c) Zeigen Sie die *Stetigkeit von unten*: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Aufgabe 14.

Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nicht fallend und rechtsseitig stetig. Es bezeichne μ_F das Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(a) *Ergänzung zu Prop. 1.26*: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\mu_F([a, b]) = F(b) - \lim_{x\uparrow a} F(x), \qquad \mu_F(\{a\}) = F(a) - \lim_{x\uparrow a} F(x).$$

Hinweis: Stetigkeit des Maßes von oben.

(b) Es sei λ das Lebesgue-Maß und μ_Z das Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Berechne

$$\lambda((0, 1] \cup (2, 3]), \quad \lambda((1, 2)), \quad \lambda((-\infty, 0]), \quad \lambda(\{0\}), \quad \lambda(\mathbb{Q}), \quad \lambda([0, 1]\setminus\mathbb{Q}).$$

und

$$\mu_Z(\{1, 2, 3\}), \quad \mu_Z(\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}).$$

(c) Es bezeichne μ_{F_i}, $i = 1, 2$ das Lebesgue-Stieltjes-Maß zu $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{y^2}\mathbb{I}_{\{y\geq 1\}}dy$ und $F_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{I}_{[k,\infty)}(x)$. Berechnen Sie für $i = 1, 2$,

$$\mu_{F_i}(\{2,3\}), \qquad \mu_{F_i}([2,5]).$$

Aufgabe 15.

Sei bezeichne λ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Zeigen Sie: λ ist translationsinvariant, d.h. für alle $c \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\lambda(B) = \lambda(B + c), \qquad B + c := \{b + c : b \in B\}.$$

Aufgabe 16.

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω.

(a) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$. Seien μ, ν endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Es gelte $\mu \leq \nu$ auf $\mathcal{E}$. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass nicht $\mu \leq \nu$ auf $\mathcal{A}$ folgen muss.

(b) Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und $\mathcal{E} = \{\{k, k+1\} : k \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Finden Sie zwei σ-endliche Maße μ_1, μ_2 auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$, aber $\mu_1 \neq \mu_2$. Welche Voraussetzung von 1.21(a),(b) ist verletzt?

Aufgabe 17.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $X_r : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $r \in \mathbb{R}$ messbare numerische Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine messbare numerische Funktion (*ohne* Verwendung von P11(a)).
Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathcal{E} := \{[a, \infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt: $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(b) Die Ersteintrittszeit $\tau_B : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ in ein $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$\tau_B := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\}, \qquad \text{wobei wir setzen: } \inf \emptyset := \infty,$$

ist eine messbare numerische Funktion.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathcal{E}_2 := \{[-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt: $A(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(c) $\inf_{r\in\mathbb{R}} X_r : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist im Allgemeinen keine messbare numerische Funktion.
Hinweis: Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel wie folgt: Sei $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ und wählen Sie $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Definieren Sie für $r \in C$: $X_r = -\mathbb{I}_{\{r\}}$ und für $r \notin C$: $X_r = 0$.

(d) Ist für alle $\omega \in \Omega$ die Abbildung $r \mapsto X_r(\omega)$ stetig, so ist $\inf_{r\in\mathbb{R}} X_r : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion.
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Folgenstetigkeit, dass $\inf_{r\in\mathbb{R}} X_r = \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q$ (auf $\overline{\mathbb{R}}$ kann eine Metrik definiert werden, welche die in der Vorlesung definierte Topologie liefert, so dass ein Folgenstetigkeitsargument möglich ist).

Aufgabe 18.

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ Messräume und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung. Für ein $A \in \mathcal{A}$ bezeichne $X|_A : A \to \mathcal{X}, \omega \mapsto X(\omega)$ die Einschränkung von X auf A und $\mathcal{A}|_A := \mathcal{A} \cap A = \{C \cap A : C \in \mathcal{A}\}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ über A.

(a) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine höchstens abzählbare Folge disjunkter Mengen mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$X : \Omega \to \mathcal{X} \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B})\text{-messbar} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N} : X|_{A_i} : A_i \to \mathcal{X} \quad (\mathcal{A}|_{A_i}, \mathcal{B})\text{-messbar}.$$

Hinweis: Nutzen Sie $(X|_{A_i})^{-1}(B) = X^{-1}(B) \cap A_i$.

Es seien nun (Ω, d) und $(\mathcal{X}, \rho)$ metrische Räume. Die Borelsche σ-Algebra auf Ω ist definiert durch $\mathcal{B}_\Omega := A(\{A \subset \Omega : A \text{ offen in } (\Omega, d)\})$.
Sei $A \subset \Omega$. Mit der eingeschränkten Metrik $d|_{A\times A}$ wird A wieder zu einem metrischen Raum, wobei die offenen Mengen durch $\{B \cap A : B \text{ offen in } (\Omega, d)\}$ gegeben sind.

(b) Zeigen Sie:

$$\mathcal{B}_A = \mathcal{B}_\Omega|_A.$$

Hinweis: Die linke Seite ist die Borelsche σ-Algebra über A, die rechte Seite die Spur-σ-Algebra von $\mathcal{B}_\Omega$. Nutzen Sie Blatt 1, A4(a).

(c) Die Einschränkung $X|_A : A \to \mathcal{X}$ sei stetig. Zeigen Sie: $X|_A$ ist $(\mathcal{B}_\Omega|_A, \mathcal{B}_\mathcal{X})$-messbar.
Hinweis: Die Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind wieder offene Mengen.

Aufgabe 19.

In dieser Aufgabe betrachten wir Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiere

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar ist, indem Sie jeweils einmal

   (i) die Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(x^{-1})\mathbb{I}_{[-\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{n\pi}]^c}(x)$ nutzen.
   Hinweis: Wie hängen f_n, f zusammen? Welche analytische Eigenschaft hat f_n?

   (ii) und einmal Aufgabe 10(a),(c) nutzen.

(b) Zeigen Sie, dass g $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar ist, indem Sie g als Limes primitiver Funktionen darstellen.

(c) Sei h überall differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Ableitung $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar ist.

Aufgabe 20.

In dieser Aufgabe berechnen wir ein Maßintegral $\int f d\lambda$ auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ ausgestattet mit dem Lebesgue-Maß λ mit Hilfe der Definition.
Sei eine $\mathcal{B}_\mathbb{R} - \mathcal{B}_\mathbb{R}$-messbare Funktion gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - |x|$$

(a) Ermitteln Sie Positiv- und Negativteil f^+, f^-.

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $f_n^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n^+(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{\frac{j-1}{2^n} \le f^+(x) < \frac{j}{2^n}\}} + n\mathbb{I}_{\{f^+(x) \ge n\}}$$

primitive Funktionen mit $f_n^+ \uparrow f^+$ sind. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ die Abbildung f_n^+ in der Form $f_n^+(x) = \sum_{j=1}^k y_j \mathbb{I}_{A_j}(x)$ mit expliziten $y_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ an.

(c) Ermitteln Sie $\int f_n^+ d\lambda$ mit Hilfe der Definition des Maßintegrals.

(d) Ermitteln Sie $\int f^+ d\lambda$ und geben Sie (ohne detaillierte Rechnung für f^-) den Wert $\int f d\lambda$ an.

Aufgabe 21.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $X, X_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare numerische Funktionen.

(a) Zeigen Sie: $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist eine messbare numerische Funktion.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass $\mathcal{E} = \{[-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt: $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(b) Sei

$$\tau : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \tau(\omega) := \sup\{i \in \mathbb{N} : X_i(\omega) > 0\}, \qquad \sup\emptyset := 0.$$

der letzte Zeitpunkt, bei welchem X_i positiv ist. Zeigen Sie, dass τ eine messbare numerische Funktion ist.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass $\mathcal{E}_2 = \{[a, \infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt: $A(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(c) Für alle $c \in \overline{\mathbb{R}}$ gelte $X^{-1}(\{c\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = c\} \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass X keine messbare numerische Funktion sein muss.
Hinweis: Sie dürfen ohne weitere Konstruktion annehmen, dass es eine Menge $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ gibt.

Aufgabe 22.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f, X, Y : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen, $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) $Z := (X, Y) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^2$ ist eine 2-dimensionale messbare numerische Funktion.
Hinweis: $\mathcal{E} = \{[-\infty, a_1] \times [-\infty, a_2] : a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^2}$.

(b) Die Abbildung

$$Z : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \quad Z(\omega) := \begin{cases} X(\omega), & \omega \in A, \\ Y(\omega), & \omega \in A^c \end{cases}$$

ist eine messbare numerische Funktion.

(c) Für $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ist

$$f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

eine messbare numerische Funktion.

Aufgabe 23.

Seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildungen mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbar ist, indem Sie einmal

(i) die Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| \geq \frac{1}{n}, \\ n^2 x, & |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$, nutzen,

Hinweis: Wie hängen f_n, f zusammen? Welche analytische Eigenschaft hat f_n?

(ii) und einmal Blatt 3, Aufgabe A10(a),(c) nutzen.

(b) Zeigen Sie, dass g $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar ist, indem Sie g als Limes primitiver Funktionen darstellen.

(c) Die Funktion $g : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}, (s,x) \mapsto g(s,x)$ sei für alle $x \in [0,1]$ stetig in s. Außerdem sei g für alle $s \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar in x. Zeigen Sie, dass $h(s) := \int_0^1 g(s,x)\,\mathrm{d}x$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar ist.
Hinweis: Riemann-Integrierbarkeit bedeutet, dass das Integral als Grenzwert beliebiger Riemannscher Zwischensummen geschrieben werden kann.

Aufgabe 24.

In dieser Aufgabe berechnen wir ein Maßintegral $\int f d\lambda$ auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ ausgestattet mit dem Lebesgue-Maß λ ausschließlich mittels der Definition.
Sei eine $\mathcal{B}_\mathbb{R} - \mathcal{B}_\mathbb{R}$-messbare Funktion gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 1, \\ x^{1/2}, & x \in [0,1), \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Ermitteln Sie Positiv- und Negativteil f^+, f^-.

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $f_n^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n^+(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{\frac{j-1}{2^n} \leq f^+(x) < \frac{j}{2^n}\}} + n\mathbb{I}_{\{f^+(x) \geq n\}}$$

primitive Funktionen mit $f_n^+ \uparrow f^+$ sind. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ die Abbildung f_n^+ in der Form $f_n^+(x) = \sum_{j=1}^k y_j \mathbb{I}_{A_j}(x)$ mit expliziten $y_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ an.

(c) Berechnen Sie $\int f_n^+ d\lambda$ mit der Definition des Maßintegrals und (b).
Hinweis: $\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$ *für* $N \in \mathbb{N}$.

(d) Ermitteln Sie $\int f^+ d\lambda$ und geben Sie (ohne detaillierte Rechnung für f^-) den Wert $\int f d\lambda$ an.

Aufgabe 25.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein Messraum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbare Abbildung. Sei

$$\mu^X : \mathcal{B} \to [0, \infty], \quad \mu^X(B) := \mu(X^{-1}(B))$$

das von X induzierte Maß μ^X auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

(a) Sei weiter $h : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar numerisch und $\circ$ die Komposition. Zeigen Sie: Es gilt

$$\int (h \circ X)\,\mathrm{d}\mu = \int h\,\mathrm{d}\mu^X,$$

falls eines der beiden Integrale existiert.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage mittels maßtheoretischer Induktion. Verwenden Sie im ersten Schritt, dass für $B \in \mathcal{B}$ gilt: $\mathbb{I}_B \circ X = \mathbb{I}_{X^{-1}(B)}$.

(b) Sei $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar numerisch mit $\mu(\{X > 0\}) > 0$. Zeigen Sie:

$$\int_{\{X>0\}} X \,\mathrm{d}\mu > 0.$$

Hinweis: Definieren Sie $A_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > \frac{1}{n}\}$. Zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mu(A_N) > 0$ und zeigen Sie $\int_{\{X>0\}} X \, d\mu \geq \frac{1}{N}\mu(A_N)$.

Aufgabe 26.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Sei $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

(1) Für jedes $x \in U$ ist $f(x, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar.

(2) Für μ-fast alle $\omega \in \Omega$ existiert die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} f(\cdot, \omega) : U \to \mathbb{R}$, und es gibt eine μ-integrierbare Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $\forall x \in U, \omega \in \Omega : |\frac{\partial}{\partial x} f(x, \omega)| \leq g(\omega)$.

Zeigen Sie: Für alle $x_0 \in U$ ist $x \mapsto \int f(x, \omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega)$ differenzierbar in x_0 mit

$$\frac{\partial}{\partial x} \int f(x_0, \omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

Hinweis: Für eine beliebige reelle Folge $h_n \to 0$, schreiben Sie $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n,\omega)-f(x_0,\omega)}{h_n}$, nutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und den Satz von der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 27.

Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Weiterhin sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare Abbildungen.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz

$$(i) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)} \,\mathrm{d}\lambda(x), \qquad (ii) \quad \lim_{a\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k^a}$$

Hinweis: Sie dürfen für (ii) ohne Beweis annehmen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{\sqrt{k}} < \infty$.

(b) Sei $f_n(x) = n \cdot e^{-nx} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$. Zeigen Sie, dass eine $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit $f_n \to f$ λ-f.s., und zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\lambda$. Geben Sie an, welche Voraussetzung vom Satz der dominierten Konvergenz verletzt ist.

(c) Sei $f_n(x) = \frac{2+(-1)^n}{n} \cdot \mathbb{I}_{[0,n]}(x)$. Überprüfen Sie, welche der Ungleichungen

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\lambda, \qquad \limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

erfüllt sind. Geben Sie im Falle der Ungültigkeit an, welche Voraussetzung des Lemmas von Fatou verletzt sind.

Aufgabe 28.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Abbildungen $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei f_n μ-integrierbar mit $\int f_n \,\mathrm{d}\mu = 1$. Außerdem gelte $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast überall.

(i) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel: Dann muss f nicht bereits μ-integrierbar sein. *Hinweis: Sie können z.B.* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ *wählen und sich von* $f_n(x) = \sin(x)\mathbb{I}_{[0,(2n-1)\pi]}(x)$ *inspirieren lassen.*

(ii) Zeigen Sie: Falls alle f_n nichtnegativ sind, so ist f μ-integrierbar.

(b) Zeigen Sie: Ist f μ-integrierbar und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, dann gilt bereits

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass mit $B_N := \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \leq N\}$ *gilt:* $|\int_{A_n} f \, d\mu| \leq N \cdot \mu(A_n) + \int |f| \cdot \mathbb{I}_{B_N^c} \, d\mu$. *Führen Sie nun nacheinander* $\lim_{n\to\infty}$, $\lim_{N\to\infty}$ *aus. P16(a).*

Aufgabe 29.

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf diesem Raum, sowie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty]$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann ist

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \mu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot \mu_n(A)$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Zeigen Sie mittels maßtheoretischer Induktion, dass für eine messbare numerische Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu_n,$$

falls alle Ausdrücke auf der rechten Seite existieren und wohldefiniert sind.

(b) Es sei $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar numerisch mit $X \geq 0$ f.s. Zeigen Sie:

$$\int X \, \mathrm{d}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0 \quad f.s.$$

Aufgabe 30.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Die Abbildung $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ erfülle

(1) Für jedes $x \in U$ ist $f(x, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar.

(2) Für μ-fast alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\cdot, \omega) : U \to \mathbb{R}$ stetig, und es gibt eine μ-integrierbare Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $|f(x, \omega)| \leq g(\omega)$ für alle $x \in U, \omega \in \Omega$.

Zeigen Sie: für jedes $x_0 \in U$ ist $x \mapsto \int f(x, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ in x_0 stetig.
Hinweis: Nutzen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 31.

Es bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von der dominierten/monotonen Konvergenz

$$(i) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty]} \frac{\sqrt{x}}{1 + nx^3} \, \mathrm{d}\lambda(x), \qquad (ii) \quad \lim_{\lambda\uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{2})^k}{(2-\lambda)^{(k^2)}}.$$

(b) Sei für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion gegeben durch $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{I}_{[0,n]}(x)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int f_n \; \mathrm{d}\lambda \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n \; \mathrm{d}\lambda$. Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von der monotonen bzw. zum Satz von der dominierten Konvergenz?

(c) Sei für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion gegeben durch $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$.Überprüfen Sie, welche der Ungleichungen

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \; \mathrm{d}\lambda \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n \; \mathrm{d}\lambda, \qquad \limsup_{n\to\infty} \int f_n \; \mathrm{d}\lambda \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n \; \mathrm{d}\lambda.$$

erfüllt sind. Geben Sie im Falle der Ungültigkeit an, welche Voraussetzung des Lemmas von Fatou verletzt sind.

Aufgabe 32.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar numerische Funktionen $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Sei f μ-integrierbar. Zeigen Sie;

$$\lim_{n\to\infty} \int |f| \cdot \mathbb{I}_{\{|f|\geq n\}} \; \mathrm{d}\mu = 0.$$

(b) Seien $f_n \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \; \mathrm{d}\mu.$$

Folgern Sie: Ist $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty]$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, so gilt stets $\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k}$.

Aufgabe 33.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν, ν_1, ν_2 σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Es gelte $\nu, \nu_1, \nu_2 \ll \mu$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$ und

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \qquad \mu - \text{f.s.}$$

(b) Falls auch $\mu \ll \nu$, so gilt

$$\frac{d\mu}{d\nu} = (\frac{d\nu}{d\mu})^{-1} \qquad \nu - \text{f.s. und } \mu - \text{f.s.}$$

Sei nun $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar mit $\mathbb{E}|X| < \infty$. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

(c) Zeigen Sie, dass eine $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbare Abbildung $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall F \in \mathcal{F} : \quad \int_F X \; \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F Z \; \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Hinweis: Zerlegen Sie $X = X^+ - X^-$. Aus der Vorlesung 1.60 ist bekannt, dass $\mu^\pm(F) = \int_F X^\pm \; d\mathbb{P}$ Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ sind. Wenden Sie den Satz von Radon-Nikodym an.

Aufgabe 34.
Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

- $\mathbb{P}_1$ besitze die Dichte $f_1(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ bzgl. des Lebesgue-Maßes λ,
- $\mathbb{P}_2$ besitze die Dichte $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ bzgl. λ.

Gilt hier $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ bzw. $\mathbb{P}_2 \ll \mathbb{P}_1$? Berechnen Sie $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$.
Hinweis: Nutzen Sie Ergebnisse von Aufgabe 17 für die Berechung der Dichte.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$. Es seien $p \in (0,1)$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Für $i = 1, 2$ seien $\mathbb{P}_i = \text{Bin}(m_i, p)$ Binomialverteilungen mit Dichten

$$f_i(x) = \binom{m_i}{x} p^x(1-p)^{m_i - x} \cdot \mathbb{I}_{\{0,1,\ldots,m_i\}}(x)$$

bzgl. des Zählmaßes $\mu_Z(A) = |A|$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(i) Unter welchen Bedingungen an m_1, m_2 gilt $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$?

(ii) Geben Sie im Falle von $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ zwei verschiedene Dichten $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ an, die aber $\mathbb{P}_2$-f.s. gleich sind.

Aufgabe 35.
Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ eine überabzählbare Menge. Unter "abzählbar" wollen wir im Folgenden "höchstens abzählbar" verstehen. Bekanntermaßen ist $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ eine σ-Algebra über Ω. Auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definieren wir Maße durch

$$\mu(A) := |A|, \qquad \nu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar}, \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ abzählbar}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\nu \ll \mu$.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Dichte f von ν bzgl. μ gibt.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe solch ein f, und nutzen Sie die Definition einer Dichte mit den Mengen $A = \{x\}$, $x \in \Omega$.

(c) Warum widersprechen die Resultate (a),(b) nicht dem Satz von Radon-Nikodym? Finden Sie die nicht erfüllte Voraussetzung und weisen Sie nach, dass diese nicht erfüllt ist.

Aufgabe 36.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, d.h. eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbare Abbildung.

(a) Sei $X \sim U[0,1]$, d.h. $\mathbb{P}^X$ besitze die Dichte $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ bzgl. des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(i) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}e^X$.

(ii) Welche Ungleichung der Vorlesung liefert $\exp(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}e^X$? Prüfen Sie nach, dass die Ungleichung hier erfüllt ist.

(b) Sei $X \sim \mathrm{Bin}(1,p)$ mit $p \in (0,1)$, d.h. $\mathbb{P}^X$ besitze die Dichte $f(x) = (1-p)\mathbb{I}_{\{0\}}(x) + p\mathbb{I}_{\{1\}}(x)$ bzgl. des Zählmaßes μ_Z auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

   (i) Zeigen Sie (ohne die Verteilung von X zu nutzen) mit Hilfe der Hölder-Ungleichung, dass für alle $q \in \mathbb{R}, q > 1$ gilt: $\mathbb{E}|X| \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$.

   (ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}|X|$ und $\mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$ und prüfen Sie nach, dass hier $\mathbb{E}|X| \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$ erfüllt ist.

Aufgabe 37.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν, ρ σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Zeigen Sie: $\frac{d\mu}{d\mu} = 1$ μ-f.s.

(b) Es sei $\rho \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$. Zeigen Sie, dass $\rho \ll \mu$ und

$$\frac{d\rho}{d\mu} = \frac{d\rho}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu} \quad \mu\text{-f.s.}$$

(c) Zeigen Sie, dass $\nu \ll \mu + \nu$. Berechnen Sie $\frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}$ in Termen von $f := \frac{d\nu}{d\mu}$.

Aufgabe 38.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Seien $a_1, a_2 \in (0, \infty)$. Für $i = 1, 2$ seien $\mathbb{P}_i = U[0, a_i]$ die Gleichverteilungen mit Dichten

$$f_i(x) = \frac{1}{a_i}\mathbb{I}_{[0,a_i]}(x)$$

bzgl. des Lebesgue-Maßes λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

   (i) Unter welchen Bedingungen gilt $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$?

   (ii) Geben Sie im Falle von $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ zwei verschiedene Dichten $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ an, die aber $\mathbb{P}_2$-f.s. gleich sind.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$. Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$. Für $i = 1, 2$ seien $\mathbb{P}_i = \mathrm{Poi}(\lambda_i)$ Poissonverteilungen mit Dichten

$$f_i(x) = \frac{\lambda_i^x}{x!}e^{-\lambda_i}$$

bzgl. des Zählmaßes μ_Z auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

   (i) Unter welchen Bedingungen gilt $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$?

   (ii) Geben Sie im Falle von $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ eine Dichte $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ an.

Aufgabe 39.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass ein zu μ äquivalentes *endliches* Maß ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ existiert (hierbei heißen zwei Maße μ, ν äquivalent, wenn $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$ gilt).

Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $\mu(E_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$, und definiere

$$\nu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \frac{\mu(E_n \cap A)}{\mu(E_n) + 1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ν ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$.

(c) Ermitteln Sie $\frac{d\nu}{d\mu}$ und $\frac{d\mu}{d\nu}$.

Aufgabe 40.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, d.h. eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Abbildung.

(a) $\mathbb{P}^X$ besitze die Dichte $f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{1,2\}}(x)$ bzgl. des Zählmaßes μ_Z auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

   (i) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}\log(X)$.

   (ii) Welche Ungleichung der Vorlesung liefert $\mathbb{E}\log(X) \leq \log(\mathbb{E}X)$? Prüfen Sie nach, dass die Ungleichung hier erfüllt ist.

(b) Sei $X \sim U[0,1]$, d.h. $\mathbb{P}^X$ besitze die Dichte $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ bzgl. des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

   (i) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^2]$ und $\mathbb{E}[|X|^3]$.

   (ii) Welche Ungleichung der Vorlesung liefert $\mathbb{E}[X^2]^{1/2} \leq \mathbb{E}[|X|^3]^{1/3}$? Prüfen Sie nach, dass die Ungleichung hier erfüllt ist.

Aufgabe 41.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar mit $\int |f(x)|^2 d\lambda(x) < \infty$ und

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad \int f(x) x^n e^{-x^2/2} d\lambda(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $f \equiv 0$ λ-f.s. gilt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zunächst für $a \in \mathbb{C}$, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int x^n e^{-x^2/2} f(x) d\lambda(x) = \int e^{ax - \frac{x^2}{2}} f(x) d\lambda(x). \qquad (*)$$

Zeigen Sie insbesondere zunächst, dass die Integranden auf beiden Seiten λ-integrierbar sind.
Hinweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Satz von Fubini.

(b) Folgern Sie aus der Voraussetzung und (a), dass die Fourier-Transformierte von $g(x) = e^{-x^2/2} f(x)$ konstant Null ist.
Hinweis: Verwenden Sie $a = ti$, $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 42.

Ziel der Aufgabe ist es, anhand von Gegenbeispielen zu zeigen, dass die Voraussetzungen im Satz von Fubini wirklich notwendig sind.

(a) Wir betrachten die Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, wobei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gelte und sowohl μ_1 als auch μ_2 das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ bezeichnen. Weiterhin sei die messbare Funktion $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ gegeben durch

$$f(\omega_1, \omega_2) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega_1 = \omega_2 \\ -1, & \text{falls } \omega_1 = \omega_2 + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Sei nun $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = ((0,1), \mathcal{B}_{(0,1)}, \lambda)$ sowie $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = ((0,1), \mathcal{P}((0,1)), \mu)$. Dabei bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $(0,1)$ und μ das Zählmaß $\mu(A) = |A|$. Ferner sei die messbare Funktion $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ definiert durch $f(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{I}_{\{\omega_1 = \omega_2\}}$.

Berechnen Sie in beiden Fällen $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, \mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1$ sowie $\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, \mathrm{d}\mu_1 \right) \mathrm{d}\mu_2$ und zeigen Sie, welche Voraussetzungen des Satzes von Fubini verletzt sind.

Aufgabe 43.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}^X((-\infty, x])$.

(a) Sei $X \geq 0$. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}[X^\alpha] = \alpha \int_{(0,\infty)} x^{\alpha-1}(1 - F(x)) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Hierbei bezeichnet λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(b) Sei F stetig. Zeigen Sie: $\int F(x) dF(x) = \frac{1}{2}$. Machen Sie das einmal

(i) unter Nutzung des Satzes von Fubini.
Hinweis: Leiten Sie die Gleichung $\int F(x)dF(x) = \int (1 - F(y))dF(y)$ her.

(ii) indem Sie (ohne Beweis) die Regel $F(X) \sim U[0,1]$ nutzen (dies ist die so genannte *Probability integral transform*).
Hinweis: Nutzen Sie Satz 1.67 (Transformationsformel) einmal für X und einmal für $F(X)$.

Aufgabe 44.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, $F_Y(y) := \mathbb{P}(Y \leq y)$.

(a) Zeigen Sie, dass $X + Y$ die folgende Verteilungsfunktion besitzt:

$$F_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) \, \mathrm{d}F_Y(y).$$

Sei μ ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ und $\mathbb{P}^X \ll \mu$ mit Dichte f_X. Es gelte

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \quad \mu(B + y) = \mu(B) \quad \mathbb{P}^Y - \text{f.s.}$$

(b) Zeigen Sie mittels maßtheoretischer Induktion, dass für nichtnegative messbare numerische Funktionen $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ gilt:

$$\int h(x) d\mu(x) = \int h(x - y) d\mu(x) \quad \mathbb{P}^Y - \text{f.s.}$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass $\mathbb{P}^{X+Y} \ll \mu$ mit Dichte

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z - y) \, \mathrm{d}F_Y(y).$$

(d) Seien nun $X \sim \text{Poi}(\lambda_X)$, $Y \sim \text{Poi}(\lambda_Y)$. Berechnen Sie die Verteilung von $X + Y$.
Hinweis: Nutzen Sie (c). Es gilt $\mathbb{P}^X \ll \mu_Z$ (μ_Z Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$) mit Dichte $f_X(x) = \frac{\lambda_X^x}{x!} e^{-\lambda_X} \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x)$.

Aufgabe 45.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Seien $\mathbb{P}$ und Zufallsvariablen $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch folgende Tabelle:

ω	a	b	c	d
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$X(\omega)$	1	1	2	2
$Y(\omega)$	1	2	1	2
$Z(\omega)$	1	3	3	1

(i) Ermitteln Sie die von X, Y, Z erzeugten σ-Algebren $\sigma(X), \sigma(Y), \sigma(Z)$.

(ii) Ermitteln Sie jeweils, ob X, Y bzw. X, Z bzw. Y, Z unabhängig sind.

(b) Seien $X_1, X_2, X_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ gemeinsam unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $\sin(X_1)$, $X_3 - X_2$ unabhängig sind.

(c) Die Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ seien gemeinsam stetig verteilt, d.h. $\mathbb{P}^{(X,Y)} \ll \lambda^2 := \lambda \otimes \lambda$ mit Dichte $f_{X,Y}$. Bestimmen Sie in den folgenden beiden Fällen jeweils die Randdichten f_X, f_Y und entscheiden Sie, ob X, Y unabhängig sind.

(i) $f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{I}_{[0,1]^2}(x, y)$,

(ii) $f_{X,Y}(x, y) = 2\mathbb{I}_{\{0 \le x \le y \le 1\}}$.

Aufgabe 46.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stetig verteilte Zufallsvariablen. Es sei $\mathbb{P}^{(X,Y)} \ll \lambda^2 := \lambda \otimes \lambda$ auf $\mathbb{R}^2$ mit Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = c \cdot xy \cdot \mathbb{I}_{\{0 \le x \le y \le 2\}} = \begin{cases} c \cdot xy, & 0 \le x \le y \le 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie $c > 0$, so dass $f_{X,Y}$ tatsächlich eine Dichte von $\mathbb{P}^{(X,Y)}$ ist.

(b) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X bzw. Y (jeweils bzgl. λ auf $\mathbb{R}$).

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(2X \ge Y)$.

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X \cdot Y]$.

(e) Sind X, Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 47.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ eine integrierbare Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x) := \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}^X((-\infty, x])$.

(a) Sei zunächst $X \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0,\infty)} (1 - F(x)) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{(0,\infty)} \mathbb{P}(X > x) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

(b) Nun darf X auch negative Werte annehmen. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0,\infty)} (1 - F(x)) \, \mathrm{d}\lambda(x) - \int_{(-\infty,0]} F(x) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Aufgabe 48.
Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kompakt. Für $\delta > 0$ sei

$$M_\delta = \{z \in \mathbb{Z} : [\delta z, \delta(z+1)) \cap M \neq \emptyset\}.$$

Hierbei stellt M_δ eine Überdeckung von K mit Strecken der Länge δ auf dem Gitter $\{\delta z : z \in \mathbb{Z}\}$ dar. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \big(\delta \cdot |M_\delta|\big) = \lambda(M).$$

Mit anderen Worten: Je feiner das Gitter, desto genauer approximiert $\delta \cdot |M_\delta|$ das Lebesgue-Maß von M.

Aufgabe 49.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, $F_Y(y) := \mathbb{P}(Y \leq y)$. Es gelte $Y > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $X \cdot Y$ die folgende Verteilungsfunktion besitzt:

$$F_{X \cdot Y}(z) = \int_\mathbb{R} F_X(\frac{z}{y}) \, \mathrm{d}F_Y(y).$$

Es sei $\mathbb{P}^X \ll \lambda$ (λ das Lebesguemaß) mit Dichte f_X auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe maßtheoretischer Induktion, dass für jede nichtnegative messbare numerische Funktion $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ gilt:

$$\forall y > 0 : \quad \int h(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int \frac{1}{y} h(\frac{x}{y}) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass $\lambda(yB) = y\lambda(B)$ für $y > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^{X \cdot Y} \ll \lambda$ mit Dichte

$$f_{X \cdot Y}(z) = \int_\mathbb{R} \frac{1}{y} f_X(\frac{z}{y}) \, \mathrm{d}F_Y(y).$$

Aufgabe 50.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{4}$. Seien Zufallsvariablen $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch folgende Tabelle:

ω	a	b	c	d
$X(\omega)$	1	2	2	1
$Y(\omega)$	2	3	3	2
$Z(\omega)$	1	2	1	2

(i) Ermitteln Sie die von X, Y, Z erzeugten σ-Algebren $\sigma(X), \sigma(Y), \sigma(Z)$.

(ii) Ermitteln Sie jeweils, ob X, Y bzw. X, Z bzw. Y, Z unabhängig sind.

(iii) Sind X, Y, Z gemeinsam unabhängig?

(b) Seien $X_1, X_2, X_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ gemeinsam unabhängige Zufallsvariablen.

(i) Begründen Sie, dass die Zufallsvariablen $\max\{X_1, X_2\}$, $\mathbb{I}_{\{X_3 \leq 2\}}$ unabhängig sind.

(ii) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass $X_1 - X_2$, $X_1 + X_2$ im Allgemeinen nicht unabhängig sein müssen.

Aufgabe 51.

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Folgen von Zufallsvariablen, die jeweils wie unten gegeben sind. Untersuchen Sie X_n auf stochastische Konvergenz, fast sichere Konvergenz, Konvergenz im r-ten Mittel (alle $r \geq 1$). Geben Sie im Falle der Konvergenz den Limes an.

(a) $X_n(\omega) = \sqrt{n} \cdot \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n})}(\omega)$,

(b) $X_n(\omega) = (-1)^n \cdot \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2})}(\omega)$,

(c) $X_n = n \cdot W_{m(n),k(n)}$, wobei $m(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ (Abrunden), $k(n) = n - 2^{m(n)}$ und

$$W_{m,k}(x) := \mathbb{I}_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})}, \quad k = 0, ..., 2^m - 1.$$

Hinweis für die fast sichere Konvergenz: Für $x \in [0,1)$ gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $k(m) \in \{0, ..., 2^m - 1\}$ mit $x \in [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$. Betrachten Sie $X_{n(m)}$ mit $n(m) := 2^m + k(m)$.

Aufgabe 52.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen.

(a) Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^q] < \infty$ für ein $q > 0$. Zeigen Sie für $0 < r < q$:

(i) $\mathbb{E}[|X|^q] < \infty$,
Hinweis: Proposition 3.6 und Lemma von Fatou.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\mathbb{E}[|X_n - X|^r] \leq \mathbb{E}[|X_n - X|^q]^{r/q} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)^{\frac{q-r}{q}} + \varepsilon^r$,
Hinweis: Fügen Sie in den Erwartungswert $1 = \mathbb{I}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + \mathbb{I}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}$ ein und nutzen Sie die Hölder-Ungleichung.

(iii) $X_n \xrightarrow{(r)} X$.
Hinweis: Erst $n \to \infty$, dann $\varepsilon \to 0$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a - b|^q \leq 2^q(|a|^q + |b|^q)$.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$ der Wahrscheinlichkeitsraum aus A25, und $X_n(x) := n^{1/q} \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n})}(x)$. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen aus (a) erfüllt sind, aber $X_n \xrightarrow{(q)} 0$ nicht gilt. Es muss also wirklich $r < q$ gewählt werden.

Aufgabe 53. *"Ein Affe, der rein zufällig auf einer Computertastatur tippt, wird irgendwann einmal auch Goethes Faust schreiben".*
Formalisieren Sie diese Weisheit und geben Sie eine exakte mathematische Begründung mittels des Lemmas von Borel-Cantelli dafür, dass er dies mit Wahrscheinlichkeit Eins sogar unendlich oft tun wird (sofern er unendlich lange lebt).

Aufgabe 54.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Seien $X_n \sim \text{Exp}(1)$ $(n \in \mathbb{N})$ exponentialverteilt mit Parameter 1. Zeigen Sie:

  (i) $\frac{X_1}{\log(n)} \to 0$ f.s.

  (ii) $Y_n := \frac{X_n}{\log(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

  Sei X_n, $n \in \mathbb{N}$ nun zusätzlich unabhängig. Zeigen Sie:

  (iii) $\mathbb{P}(Y_n \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 1$. Folgern Sie: Es gibt keine ZV Y mit $Y_n \to Y$ f.s.

  (iv) $\mathbb{P}(Y_n \geq 1 + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Folgern Sie:
$$\limsup_{n\to\infty} Y_n = 1 \quad f.s.$$

(b) Seien X_n i.i.d. und es gelte $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$. Zeigen Sie, dass $\min\{|X_1|, ..., |X_n|\} \to 0$ f.s.

(c) Seien X_n identisch verteilt und es gelte $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass $\frac{X_n}{n} \to 0$ f.s.

(d) Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$ unabhängig. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, aber nicht $X_n \to 0$ f.s.

Aufgabe 55.
Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([0, 1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Folgen von Zufallsvariablen, die jeweils wie unten gegeben sind. Untersuchen Sie X_n auf stochastische Konvergenz, fast sichere Konvergenz, Konvergenz im r-ten Mittel (alle $r \geq 1$). Geben Sie im Falle der Konvergenz den Limes an.

(a) $X_n(\omega) = \exp(-n\omega)$,

(b) $X_n(\omega) = (-1)^n \cdot (\omega - \frac{1}{2})$,

(c) $X_n(\omega) = n^{\frac{1}{3}} \mathbb{I}_{[\frac{n-1}{n}, 1)}(\omega)$.

Aufgabe 56.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) Der stochastische Limes von X_n ist f.s. eindeutig bestimmt.

(b) Folgern Sie: Ist $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und existiert der f.s. Limes von X_n, so ist $X_n \to X$ f.s.

(c) Sei $r \geq 1$. Der Limes im r-ten Mittel von X_n ist f.s. eindeutig bestimmt.

(d) Sei $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ und $0 \leq X_n \downarrow$ nichtnegativ und monoton fallend. Zeigen Sie, dass $X_n \to 0$ f.s.

(e) Seien die X_n identisch verteilt mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Zeigen Sie, dass $\frac{\min\{|X_1|,...,|X_n|\}}{n} \to 0$ f.s.

Aufgabe 57.

Auf dem Boden liegen unendlich viele farbige Körner herum. Wir nehmen an, dass die Hälfte der Körner rot sind und ein Drittel der Körner blau ist. Die restlichen Körner sind gelb (Die Anteile bleiben auch erhalten, wenn beliebig viele Körner entfernt werden). Ein Huhn pickt zufällig und ohne Farbpräferenz Körner vom Boden auf. Das Huhn hört nicht auf zu picken und lebt unendlich lang. Zeigen Sie, dass das Huhn mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann 5-mal hintereinander ein gelbes Korn isst.

Aufgabe 58.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Die X_n, $n \in \mathbb{N}$ seien i.i.d. und es gelte $\mathbb{P}(|X_1| < \infty) = 1$. Zeigen Sie:

   (i) $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

   (ii) X_1 besitze die Dichte $f_{X_1}(x) = \frac{1}{2}x^{-2}\mathbb{I}_{\{|x|>1\}}$ bzgl. des Lebesguemaßes $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \geq 1$ f.s. und folgern Sie, dass $\frac{X_n}{n} \to 0$ f.s. nicht gilt.

(b) Die X_n seien i.i.d. und es gebe $\gamma > 0$ mit $\mathbb{E}[|X_1|^\gamma] < \infty$. Zeigen Sie, dass gilt

$$n^{-\frac{3}{\gamma}} \max\{X_1, ..., X_n\} \to 0 \quad f.s.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Markov-Ungleichung. Für $c \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 - (1 - \frac{c}{n})^n \leq c$.

(c) Die X_n seien identisch verteilt und es gelte $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Zeigen Sie, dass $\frac{X_n}{n^2} \to 0$ f.s.

(d) Die X_n, $n \in \mathbb{N}$ seien i.i.d. mit $X_n \sim Bin(1,p)$ (wobei $p \in (0,1)$), und

$$R_n := \sup\{k \geq 0 : X_n = X_{n+1} = ... = X_{n+k-1} = 1\}$$

die Anzahl an aufeinanderfolgenden Einsen ab dem Index n (für $X_n = 0$ setze $R_n = 0$).
Zeigen Sie: Für $\alpha > 1$ gilt: $\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log(n)} \leq -\frac{\alpha}{\log(p)}$ f.s.
Folgern Sie: $\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log(n)} \leq -\frac{1}{\log(p)}$ f.s.

Aufgabe 59.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen.

(a) Sei $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie: Ist $\mathbb{E}|\log(X_1)| < \infty$ und $\mathbb{E}\log(X_1) \in (-\infty, 0)$, so gilt $M_n \to 0$ f.s.

(b) Es gelte $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Es bezeichne $\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ (wobei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$) die empirische Varianz. Zeigen Sie: $\hat{\sigma}_n^2 \to \mathrm{Var}(X_1)$ f.s.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2$.

(c) Seien $Y_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ weitere i.i.d. Zufallsvariablen, so dass $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig von $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist. Weiter gelte $X_1, Y_1 \sim U[0,1]$. Sei $A \subset \mathcal{B}_{[0,1]^2}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_A(X_i, Y_i) \to \lambda^2(A) \quad f.s.$$

(d) Ermitteln Sie

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 ... \int_0^1}_{n \text{ Integrale}} \frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{x_1 + ... + x_n} dx_1 ... dx_n.$$

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als Erwartungswert von i.i.d. Zufallsvariablen. Benutzen Sie das starke GGZ und den Satz von der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 60.

Wir betrachten im Folgenden den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$. Eine Zahl $\omega = 0.\omega_1\omega_2\omega_3... \in [0,1)$ heißt *einfach normal*, falls für jede Ziffer $a \in \{0, ..., 9\}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k \in \{1, ..., n\} : \omega_k = a\}}{n} = \frac{1}{10},$$

d.h. in der Dezimaldarstellung kommt sie mit Häufigkeit $\frac{1}{10}$ vor. Sei $A := \{\omega \in \Omega : \omega \text{ einfach normal}\} \in \mathcal{B}_{[0,1)}$. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Zufallsvariablen $X_k : \Omega \to \mathbb{R}, X_k(\omega) := \omega_k$ (k-te Dezimalstelle nach dem Komma).

(a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_n \in \{0, ..., 9\}$ gilt: $\mathbb{P}(X_1 = a_1, ..., X_n = a_n) = \frac{1}{10^n}$.

(b) Folgern Sie: $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist i.i.d. und geben Sie die Verteilung von X_1 an.
Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Familie $(X_k)_{k=1,...,n}$ unabhängig ist.

(c) Folgern Sie mit dem starken GGZ: $\lambda(A) = 1$.

Aufgabe 61.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_n = 0$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{n^2} < \infty.$$

Sei $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$. In dieser Aufgabe zeigen wir ein starkes GGZ $\frac{S_k}{k} \to 0$ f.s.

(a) Definiere $U_n := \max_{i=1,...,2^n} |S_i|$. Zeigen Sie: $\limsup_{k\to\infty} \frac{|S_k|}{k} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{U_n}{2^{n-1}}$.
Hinweis: Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{n-1} < k \leq 2^n$.

(b) Zeigen Sie $\frac{U_n}{2^n} \to 0$ f.s.
Hinweis: Nutzen Sie Bemerkung 3.2 und die Kolmogorov-Ungleichung aus P30(d). Nach Anwendung der Kolmogorov-Ungleichung müssen Sie die auftretenden Summen vertauschen (vgl. Beweis Schritt 2 vom GGZ 3.9).

(c) Folgern Sie: $\frac{S_k}{k} \to 0$ f.s.

(d) Sei nun $X_n \sim U[-n^\alpha, n^\alpha]$, wobei $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0$ f.s.

Aufgabe 62.

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Sei $f_\theta(x) = |x - \theta|$ und $\mu := \mathbb{E}X_1 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in [\mu - 1, \mu + 1]\}$ erfüllt: Für alle $\varepsilon > 0$ ist $N(\varepsilon, \mathcal{F}) < \infty$.
Hinweis: Für geeignet gewählte $\theta_1, ..., \theta_N \in \Theta$ definieren Sie Brackets $[l_j, u_j]$ durch $l_j(x) = |x - \theta_j| - \frac{\varepsilon}{2}$, $u_j(x) = |x - \theta_j| + \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) Mit $M_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i - \theta|$ und $M(\theta) = \mathbb{E}|X_1 - \theta|$ gilt:

$$\sup_{\theta\in[\mu-1,\mu+1]} \big|M_n(\theta) - M(\theta)\big| \to 0 \quad f.s.$$

(c) Mit $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i - \overline{X_n}| \to \mathbb{E}|X_1 - \mathbb{E}X_1| \quad f.s.$$

Hinweis: Zerlegen Sie $|M_n(\overline{X_n}) - M(\mathbb{E}X_1)| \le |M_n(\overline{X_n}) - M(\overline{X_n})| + |M(\overline{X_n}) - M(\mathbb{E}X_1)|$.

(d) X_1 habe eine stetige Verteilungsfunktion F und es gelte $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\sigma^2 := \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Es sei $\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{-\hat{\sigma}_n < X_i \le \hat{\sigma}_n\}} \to F(\sigma) - F(-\sigma).$$

Hinweis: Drücken Sie die linke Seite durch die empirische Verteilungsfunktion aus und nutzen Sie das Resultat aus Beispiel 3.13.

Aufgabe 63.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

(a) Sei $X_1 \sim U[1,2]$ (Gleichverteilung auf $[1,2]$). Zeigen Sie, dass

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n} \to c \quad f.s.$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie c.

(b) Sei $X_1 \sim U[0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \to \int_{[0,1]} f \ \mathrm{d}\lambda \quad f.s.$$

(c) Ermitteln Sie

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n \text{ Integrale}} f(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}) dx_1 \dots dx_n.$$

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als Erwartungswert von i.i.d. Zufallsvariablen. Benutzen Sie das starke GGZ und den Satz von der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 64.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ unabhängige (nicht notwendig identisch verteilte) Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i = 0$ $(i \in \mathbb{N})$. Sei $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$.
Für $a > 0$ sei

$$A := \{\max_{k=1,\dots,n} |S_k| \ge a\}, \qquad A_k := \{|S_1| < a, \dots, |S_{k-1}| < a, |S_k| \ge a\}.$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $A = \dot{\bigcup}_{k=1,...,n} A_k$.

(b) $\mathbb{E}[S_n^2] \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}]$.
Hinweis: $S_n^2 \geq S_n^2 \mathbb{I}_A$.

(c) $\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}] \geq a^2 \mathbb{P}(A_k)$.
Hinweis: Wenden Sie die binomische Formel auf $S_n^2 = ((S_n - S_k) + S_k)^2$ *an. Schätzen Sie die drei entstehenden Terme separat nach unten ab; einer kann durch* 0 *abgeschätzt werden, bei einem anderen nutzen Sie, dass* $(S_n - S_k)$ *und* $S_k \mathbb{I}_{A_k}$ *unabhängig sind (wieso?)*

(d) Folgern Sie mit (a)-(c) die Kolmogorov-Ungleichung:

$$\mathbb{P}(\max_{k=1,...,n} |S_k| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{a^2}.$$

Aufgabe 65.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_n = 0$ und $\sigma^2 := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. Sei $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$.

(a) Zeigen Sie: $\frac{1}{n} \max_{k=1,...,n} |S_k| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Hinweis: Nutzen Sie die Kolmogorov-Ungleichung aus P30(d).

(b) Definiere $U_n := \max_{i=1,...,n^2} |S_i|$. Zeigen Sie: $\limsup_{k \to \infty} \frac{|S_k|}{k} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{U_n}{n^2}$.
Hinweis: Für $k \in \mathbb{N}$ *gibt es* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $(n-1)^2 < k \leq n^2$.

(c) Zeigen Sie $\frac{U_n}{n^2} \to 0$ f.s.
Hinweis: Nutzen Sie Bemerkung 3.2 und die Kolmogorov-Ungleichung aus P30(d).

(d) Folgern Sie aus (b),(c): $\frac{S_k}{k} \to 0$ f.s.

Aufgabe 66.

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\sigma^2 := \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Sei $f_\theta(x) = \min\{x, \theta\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in [\sigma - 1, \sigma + 1]\}$ erfüllt: Für alle $\varepsilon > 0$ ist $N(\varepsilon, \mathcal{F}) < \infty$.
Hinweis: Für geeignet gewählte $\theta_1, ..., \theta_N \in \Theta$ *definieren Sie Brackets* $[l_j, u_j]$ *durch* $l_j(x) = \min\{x, \theta_j\} - \frac{\varepsilon}{2}$, $u_j(x) = \min\{x, \theta_j\} + \frac{\varepsilon}{2}$. *Für* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *gilt* $|\min\{a_1, b_1\} - \min\{a_2, b_2\}| \leq \max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|\}$.

(b) Mit $M_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min\{X_i, \theta\}$ und $M(\theta) = \mathbb{E} \min\{X_1, \theta\}$ gilt:

$$\sup_{\theta \in [\sigma-1, \sigma+1]} \left| M_n(\theta) - M(\theta) \right| \to 0 \quad f.s.$$

(c) Mit $\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min\{X_i, \hat{\sigma}_n\} \to \mathbb{E} \min\{X_1, \sqrt{\mathbb{E}[X_1^2]}\} \quad f.s.$$

Hinweis: Zerlegen Sie $|M_n(\hat{\sigma}_n) - M(\sigma)| \leq |M_n(\hat{\sigma}_n) - M(\hat{\sigma}_n)| + |M(\hat{\sigma}_n) - M(\sigma)|$.

(d) X_1 habe eine stetige Verteilungsfunktion F und es gelte $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Es sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \le \overline{X_n}\}} \to F(\mathbb{E}X_1).$$

Hinweis: Drücken Sie die linke Seite durch die empirische Verteilungsfunktion aus und nutzen Sie Beispiel 3.13.

Aufgabe 67.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen, die gemeinsam stetig verteilt seien mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{I}_{\{0 \le x \le y\}} \cdot \exp(-y) = \begin{cases} \exp(-y), & 0 \le x \le y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bzgl. λ^2 auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$. Bestimmen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) die bedingten Dichten $f_{X|Y=y}(x)$ und $f_{Y|X=y}(x)$,

(b) die bedingten Erwartungswerte $\mathbb{E}[X|Y=y]$ und $\mathbb{E}[Y|X=x]$,

(c) $\mathbb{E}[X|Y]$ und $\mathbb{E}[Y|X]$.

Aufgabe 68.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie (alle Aussagen sind wie üblich bei bedingten Erwartungswerten $\mathbb{P}$-f.s. zu verstehen):

(a) Linearität des bed. Erwartungswerts: Für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.

(b) Monotonie des bed. Erwartungswerts: $X \ge 0$ f.s. $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \ge 0$.
Hinweis: Definieren Sie $F := \{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] < 0\}$. Wenden Sie Prop. 4.11 auf F an und folgern Sie $\int \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{I}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]<0\}}\, d\mathbb{P} = 0$ und daraus die Behauptung.

Seien nun $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i)$ Messräume und $X_i : \Omega \to \mathcal{X}_i$ $(i = 1, 2)$ unabhängige messbare Abbildungen. Sei $g : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ messbar.

(c) Es gelte $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[|g(X_1, y)|\big]\big|_{y=X_2}\big] < \infty$. Zeigen Sie $\mathbb{E}|g(X_1, X_2)| < \infty$ und

$$\mathbb{E}[g(X_1, X_2)|X_2] = \mathbb{E}[g(X_1, y)]\big|_{y=X_2}.$$

Aufgabe 69.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Weiter sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine weitere σ-Algebra über Ω.

(a) Projektionseigeschaft des bedingten Erwartungswerts: Sei $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Sei weiter Y $\mathcal{F}$-messbar. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] + \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2].$$

Hinweis: Schreiben Sie $X - Y = X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - Y$.

(b) (i) Seien $X, Y, Z \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[(X-Z)^2 - XYZ + e^{XZ}|X,Y]$.
Hinweis: Nutzen Sie auch A34(c). Für $W \sim N(0,\sigma^2)$ *gilt* $\mathbb{E}\exp(W) = \exp(-\sigma^2/2)$.

(ii) Es gelte $Z - X, X \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z^2|X]$.
Hinweis: Nutzen Sie $Z = (Z-X) + X$.

(c) Es seien nun $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Ermitteln Sie die folgenden Ausdrücke in Termen von $\mathbb{E}X_1$ und den bedingten Zufallsvariablen.

(i) $\mathbb{E}[S_n|X_1]$ und $\mathbb{E}[S_n|S_{n-1}]$,

(ii) $\mathbb{E}[X_1|S_n]$ und $\mathbb{E}[S_{n-1}|S_n]$.
Hinweis: Zeigen Sie $\mathbb{P}^{(X_i,S_n)} = \mathbb{P}^{(X_1,S_n)}$ *und nutzen Sie P34(c).*

Aufgabe 70.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

(a) Sei $X \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Definiere $Y := \min\{X, t\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X|Y] = \begin{cases} Y, & Y < t, \\ \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X \geq t\}}]}{\mathbb{P}(X \geq t)}, & Y = t \end{cases}.$$

Hinweis: Nutzen Sie Prop. 4.11. Zeigen Sie die Gleichheit der Integrale auf dem Erzeugendensystem $\mathcal{E} = Y^{-1}(\{[0,a] : 0 \leq a \leq t\})$ *von* $\mathcal{F} = Y^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. *Zerlegen Sie dazu* $F = Y^{-1}([0,a]) = Y^{-1}([0,t)) \dot{\cup} Y^{-1}([t,a])$.

(b) X sei stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mit Dichte f. Sei $Z := X^2$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{E}[X|Z] = \sqrt{Z}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X>0\}}|Z] - \sqrt{Z}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X<0\}}|Z]$.

(ii) Es gilt λ-f.s.

$$f_Z(z) := \frac{d\mathbb{P}^Z}{d\lambda}(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}}.$$

(iii) $\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X>0\}}|Z] = \frac{f(\sqrt{Z})}{f(\sqrt{Z}) + f(-\sqrt{Z})}$.
Hinweis: Nutzen Sie Prop. 4.11. Zeigen Sie die Gleichheit der Integrale auf dem Erzeugendensystem $\mathcal{E} = Z^{-1}(\{[0,a] : a \geq 0\})$ *von* $\mathcal{F} = Z^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(iv) Geben Sie $\mathbb{E}[X|Z]$ an.

Aufgabe 71.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen, die gemeinsam stetig verteilt seien mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y \leq 1\}}$$

bzgl. λ^2 auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$. Bestimmen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) die bedingten Dichten $f_{X|Y=y}(x)$ und $f_{Y|X=y}(x)$,

(b) die bedingten Erwartungswerte $\mathbb{E}[X|Y=y]$ und $\mathbb{E}[Y|X=x]$,

(c) $\mathbb{E}[X|Y]$ und $\mathbb{E}[Y|X]$.

Aufgabe 72.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie (alle Aussagen sind wie üblich bei bedingten Erwartungswerten $\mathbb{P}$-f.s. zu verstehen):

(a) Triviale bedingte Erwartungswerte: $\mathbb{E}[1|\mathcal{F}] = 1$ und $\mathbb{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}X$.

(b) Messbarkeitsregel: X $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[XY|\mathcal{F}] = X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.
Hinweis: Nutzen Sie Prop. 4.11. Zeigen Sie die Gleichheit der Integrale wie bei maßtheoretischer Induktion schrittweise für X, d.h. erst für Indikatorfunktionen, dann für primitive Funktionen, usw.

Seien nun $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i)$ Messräume und $X_i : \Omega \to \mathcal{X}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ messbare Abbildungen. Sei $f : \mathcal{X}_1 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_\mathbb{R}$ messbar.

(c) Zeigen Sie: Falls $\mathbb{P}^{(X_1,X_3)} = \mathbb{P}^{(X_2,X_3)}$ und $\mathbb{E}|f(X_1)| < \infty$, so gilt:

$$\mathbb{E}[f(X_1)|X_3] = \mathbb{E}[f(X_2)|X_3].$$

Aufgabe 73.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Es gelte $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$.

(a) Zeigen Sie: $Kov(X, \mathbb{E}[Y|X]) = Kov(X, Y)$.

(b) Es gelte nun $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ und $\mathbb{E}[Y|X] = X$. Zeigen Sie: $X = Y$ $\mathbb{P}$-f.s.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2]$ und betrachten Sie dann $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$.

(c) (i) Seien $X, Y, Z \overset{\text{iid}}{\sim} U[0, 1]$. Berechnen Sie

$$\mathbb{E}[4X \sin(Y) + 5Z^2 - 3e^X Y + \sin(XZ)|Y, Z].$$

Hinweis: Nutzen Sie auch A34(c).

(ii) Es gelte $Z - X, X \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\exp(Z)|X]$.
Hinweis: Nutzen Sie $Z = (Z - X) + X$. Für $W \sim N(0, \sigma^2)$ gilt $\mathbb{E}\exp(W) = \exp(-\sigma^2/2)$.

(d) Es seien $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. und $M_n := \prod_{i=1}^n X_i$. Ermitteln Sie $\mathbb{E}[M_n|X_1]$ und $\mathbb{E}[M_n|M_{n-1}]$ in Termen von $\mathbb{E}X_1$ und den bedingten Zufallsvariablen.

Aufgabe 74.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.

(a) Seien X^+, X^- der Positiv- und Negativteil von X. Es gelte $\mathbb{E}|X| < \infty$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathbb{E}[X^-|X^+] = -\frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X \leq 0\}}]}{\mathbb{P}(X \leq 0)} \mathbb{I}_{\{X^+ = 0\}}$.
Hinweis: Nutzen Sie Prop. 4.11. Zeigen Sie die Gleichheit der Integrale auf dem Erzeugendensystem $\mathcal{E} = (X^+)^{-1}(\{[0, a] : a \geq 0\})$ von $\mathcal{F} = (X^+)^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(ii) Ermitteln Sie $\mathbb{E}[X|X^+]$.

(b) Seien X, Y i.i.d. mit Dichte f bzgl. des Lebesguemaßes λ auf $\mathbb{R}$. Es gelte $\mathbb{E}|X| < \infty$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathbb{E}[X|\max\{X,Y\}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\min\{X,Y\}|\max\{X,Y\}] + \frac{1}{2}\max\{X,Y\}$.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $x + y = \max\{x,y\} + \min\{x,y\}$.

(ii) Seien nun $U = \min\{X,Y\}$, $V = \max\{X,Y\}$. Zeigen Sie, dass (jeweils λ^2- bzw. λ-f.s.):

$$f_{U,V}(u,v) := \frac{d\mathbb{P}^{(U,V)}}{d\lambda^2}(u,v) = 2f(u)f(v)\mathbb{I}_{\{u\leq v\}}, \qquad f_V(v) := \frac{d\mathbb{P}^V}{d\lambda}(v) = 2F(v)f(v).$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X|V] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\leq v\}}]|_{v=V}}{2F(V)} + \frac{1}{2}V$.

(iv) Sei nun $X_1 \sim U[0,1]$. Ermitteln Sie $\mathbb{E}[X|\max\{X,Y\}]$.

Aufgabe 75.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

(a) Sind $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingale und $a, b \in \mathbb{R}$, so ist auch $(aX_n + bY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal.

(b) Falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (messbare) konvexe nicht-fallende Funktion, so ist $(\phi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setzen Sie dabei $\mathbb{E}|\phi(X_n)| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus.

(c) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal mit der Eigenschaft $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $X_0 := 0$. Zeigen Sie, dass die Differenzen $D_n := X_n - X_{n-1}$ erfüllen: $\mathrm{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(D_k)$.

(d) Seien S, T $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass dann auch $S \wedge T := \min\{S,T\}$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Stoppzeiten sind.

Aufgabe 76.

Anna und Bob wetten um das Ergebnis von Münzwürfen. Anna bekommt 1 Euro von Bob, wenn 'Kopf' geworfen wird, und verliert 1 Euro an Bob, wenn 'Zahl' geworfen wird. Das Spiel endet, wenn Anna oder Bob kein Geld mehr hat. Anna startet mit a Euro und Bob mit b Euro $(a, b \in \mathbb{N})$. Die Münze zeige mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ 'Kopf'.
Sei $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1)$. Dann kann das Guthaben von Anna nach dem n-ten Münzwurf $(n \in \mathbb{N}_0)$ geschrieben werden als:

$$S_n := a + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad S_0 := a.$$

Sei $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Gegeben sei weiter die $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \in \{0, a+b\}\}$, die angibt, wann das Spiel endet. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{E}\tau < \infty$.
Hinweis: Definieren Sie Blöcke $B_n := (\varepsilon_{(a+b)(n-1)+1}, ..., \varepsilon_{(a+b)n})$ und $\theta := \inf\{n \in \mathbb{N} : B_n = (1, ..., 1)\}$ und folgern Sie $\tau \leq (a+b)\theta$. Was ist die Verteilung von θ?

(b) Sei $p \neq \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $(W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $W_n := (\frac{1-p}{p})^{S_n}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna gewinnt, wenn das Spiel beendet wird. *Hinweis: Wenden Sie das Optional Sampling Theorem (iii) auf* (W_n) *und* τ *an. Nutzen Sie, dass* $S_\tau \in \{0, a+b\}$.

Aufgabe 77.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\varepsilon_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1)$, wobei $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Sei $S_n := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, $S_0 := 0$. Eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei gegeben durch $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$. Für $b \in \mathbb{Z}$ sei

$$\tau_b := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = b\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $M_n := S_n - (2p-1)n$ ist ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Martingal.

(b) τ_b ist eine $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit.

Sei nun $b > 0$. Zeigen Sie:

(c) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbb{E}[\tau_b \wedge m] \leq \frac{b}{2p-1}$.
Hinweis: Wenden Sie das Optional Sampling Theorem auf M_n *und* $\tau_b \wedge m$ *an.*

(d) $\mathbb{E}\tau_b = \frac{b}{2p-1}$.
Hinweis: Wenden Sie erneut das Optional Sampling Theorem an, dieses Mal aber auf M_n *und* τ_b. *Um* $\mathbb{E}\tau_b < \infty$ *zu zeigen, verwenden Sie (c) und monotone Konvergenz.*

Sei nun $b < 0$ und $(W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ das Martingal aus A38(b). Zeigen Sie:

(e) $S_n \to \infty$ f.s.

(f) $\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = (\frac{p}{1-p})^b$.
Hinweis: Nutzen Sie (e) und nutzen und begründen Sie die folgende Gleichung für $m \in \mathbb{N}$, *vgl. P39(b):*

$$1 = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[W_{m\wedge\tau_b}] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} W_{m\wedge\tau_b}] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} W_{m\wedge\tau_b}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] + \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} W_{m\wedge\tau_b}\mathbb{I}_{\{\tau_b=\infty\}}].$$

Aufgabe 78.

Eine Urne enthalte zum Zeitpunkt $n = 0$ genau eine rote und eine schwarze Kugel. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird eine Kugel gezogen, die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt und eine weitere Kugel derselben Farbe hinzugefügt. Sei R_n die Anzahl der roten Kugeln *nach* dem n-ten Mal Ziehen (und Zurücklegen) und $M_n = \frac{R_n}{n+2}$ der Anteil der roten Kugeln in der Urne. Sei weiter $X_n := \mathbb{I}_{\{\text{Die in der } n\text{-ten Runde gezogene Kugel ist rot}\}}$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(M_k : k \leq n)$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$M_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}M_n + \frac{1}{n+3}X_{n+1},$$

sowie $|M_n| \leq 1$. Ermitteln Sie $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n)$ in Termen von M_n.

(b) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(c) Es sei $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$ die Nummer der Spielrunde, bei welcher das erste Mal eine schwarze Kugel gezogen wird. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbb{P}(\tau > n) = \frac{1}{n+1}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[\frac{\tau}{\tau+2}] = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 79.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Sind $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Submartingale, so ist auch die Folge $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Submartingal.

(b) Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal. Zeigen Sie, dass dann

$$C_n := \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}[Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] \quad (n \geq 2), \qquad C_1 := 0$$

vorhersagbar und monoton wachsend ist und $X_n := Y_n - C_n$ ein Martingal.
Bemerkung: Damit besitzt jedes Submartingal eine Zerlegung in eine vorhersagbare monoton wachsende Folge und ein Martingal (Doob-Zerlegung).

(c) Seien S, T $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass dann auch $S \vee T := \max\{S, T\}$ sowie $S + T$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Stoppzeiten sind.

Aufgabe 80.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\varepsilon_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \frac{1}{2}$. Definiere für $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k, \quad S_0 := 0,$$

$\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$ und $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \in \{2, -3\}\}$. Zeigen Sie:

(a) τ ist eine $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit.

(b) Es gilt $\mathbb{E}\tau < \infty$.
Hinweis: Definieren Sie Blöcke $B_n := (\varepsilon_{5n-4}, ..., \varepsilon_{5n})$ und $\theta := \inf\{n \in \mathbb{N} : B_n = (1, 1, 1, 1, 1)\}$ und folgern Sie $\tau \leq 5\theta$. Was ist die Verteilung von θ?

(c) Es ist $\mathbb{P}(S_\tau = 2) = \frac{3}{5}$.
Hinweis: Wenden Sie das Optional Sampling Theorem auf das Martingal S_n an. Nutzen Sie, dass S_τ nur zwei verschiedene Werte annehmen kann.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}\tau$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist und wenden Sie das Optional Sampling Theorem darauf an.

Aufgabe 81.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\varepsilon_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Sei $S_n := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ und $S_0 := 0$. Für $b \in \mathbb{N}$ definiere

$$\tau_b := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = b\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $\sigma > 0$ ist die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch $M_n := \frac{e^{\sigma S_n}}{\cosh(\sigma)^n}$ ein Martingal bzgl. einer geeigneten Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Hierbei ist $\cosh(\sigma) := \frac{1}{2}(e^\sigma + e^{-\sigma})$.

(b) $\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1$.
Hinweis: Nutzen und begründen Sie die folgende Gleichung für $m \in \mathbb{N}$:

$$1 = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[M_{m\wedge\tau_b}] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_{m\wedge\tau_b}] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_{m\wedge\tau_b}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] + \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_{m\wedge\tau_b}\mathbb{I}_{\{\tau_b=\infty\}}]$$

Vereinfachen Sie die rechte Seite und wenden Sie $\sigma \downarrow 0$ an.

(c) Es gilt $\mathbb{E}\tau_b = \infty$.
Hinweis: Verwenden Sie die Kontraposition des Optional Sampling Theorems.

Aufgabe 82.

Ein Spieler hat ein gut durchgemischtes Kartendeck mit $N = 52$ Spielkarten, davon 26 rot. Zum Zeitpunkt $n = 1, 2, ..., N$ deckt er eine neue Karte auf und beobachtet ihre Farbe. Genau einmal in dem Spiel darf der Spieler vor dem Aufdecken der Karte sagen, dass die nächste Karte rot ist. Ist die Karte rot, so hat der Spieler das Spiel gewonnen. Sei R_n die Anzahl der verbleibenden verdeckten roten Karten, nachdem die n-te Karte aufgedeckt wurde. Definiere für $n \in \{0, ..., N-1\}$

$$M_n := \frac{R_n}{N-n}, \qquad \mathcal{F}_n := \sigma(M_k : k \le n)$$

sowie für $n \in \{1, ..., N\}$: $X_n := \mathbb{I}_{\{\text{Im } n\text{-ten Zug wird eine rote Karte aufgedeckt}\}}$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \{0, ..., N-1\}$ gilt:

$$M_{n+1} = \frac{N-n}{N-n-1}M_n - \frac{1}{N-n-1}X_{n+1},$$

sowie $|M_n| \le 1$. Ermitteln Sie $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n)$ in Termen von M_n.

(b) $(M_n)_{0\le n\le N-1}$ ist ein Martingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\le n\le N-1}$.

Sei τ eine $(\mathcal{F}_n)_{0\le n\le N-1}$-Stoppzeit. Sie bezeichne den Zeitpunkt, zu welchem der Spieler stoppt und sagt, die nächste Karte wäre rot. Zeigen Sie:

(c) Die Gewinnwahrscheinlichkeit erfüllt $\mathbb{P}(X_{\tau+1} = 1) = \mathbb{E}M_\tau$.

(d) Es gilt $\mathbb{P}(X_{\tau+1} = 1) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 83.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\varepsilon_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$. Seien $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ und

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_k, \quad S_0 := 0, \qquad M_n := \exp(S_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2).$$

Zeigen Sie:

(a) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \le n)$.
Hinweis: Für $Y_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$, $Y_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$ unabhängig und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}\exp(Y_1) = \exp(\frac{\sigma_1^2}{2})$ und $a_1Y_1 + a_2Y_2 \sim N(0, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Zufallsvariable $M_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit $M_n \to M_\infty$ f.s.

Gelte nun $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \infty$.

(c) Zeigen Sie, dass $M_\infty = 0$ f.s.
Hinweis: Zeigen Sie elementar mit der Definition, dass $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(d) Ist $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar? Gilt $M_n \xrightarrow{(1)} M$ mit einer Zufallsvariablen $M : \Omega \to \mathbb{R}$?
Hinweis: Aus $M_n \xrightarrow{(1)} M$ *folgt* $\mathbb{E}M_n \to \mathbb{E}M$.

Aufgabe 84.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Zufallsvariablen. Definiere $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_k : k \le n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{E}Y_n = 0, \mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$. Zeigen Sie:

$$\forall x > 0 : \quad \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} Y_k > x\right) \le \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{\mathbb{E}[Y_n^2] + x^2}$$

Hinweis: Wenden Sie die Funktion $\phi(x) = (x+c)^2$ *mit geeignetem* $c \in \mathbb{R}$ *auf beiden Seiten der Ungleichung in* $\mathbb{P}(\cdot)$ *an. Nutzen Sie dann A37(b) (warum wird die Voraussetzung* ϕ *monoton wachsend nicht benötigt?) und die Doob-Ungleichung.*

(b) Nun sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i.i.d. und es gelte $\mathbb{P}(Y_0 = 4) = \mathbb{P}(Y_0 = 0) = \mathbb{P}(Y_0 = -1) = \frac{1}{3}$. Definiere $X_n := \prod_{i=1}^n Y_i$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist, aber $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ = \infty$ gilt (und somit der Martingalkonvergenzsatz nicht anwendbar ist).
Hinweis: Nutzen Sie $\mathbb{E}X_n^+ \ge \mathbb{E}[X_n^+ \mathbb{I}_A]$ *mit* $A = \bigcap_{i=1}^n \{Y_i = 4\}$.

Aufgabe 85.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$D_n := M_n - M_{n-1}$$

die zugehörige Martingaldifferenzenfolge.

(a) Es gelte $\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[D_k^2]}{k^2} < \infty$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n D_k \to 0$ f.s.
Hinweise:

- *Wenden Sie den Martingalkonvergenzsatz auf* $X_n := \sum_{k=1}^n \frac{D_k}{k}$ *an. Verwenden Sie danach ohne Beweis* <u>*Kroneckers Lemma*</u>*: Sind* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei reellwertige Folgen und* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nichtnegativ und monoton wachsend gegen* ∞, *dann gilt: Ist* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} = z \in \mathbb{R}$, *so ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n x_k = 0$.
- *Nutzen und begründen Sie die Ungleichung* $\mathbb{E}[X_n^+] \le \mathbb{E}[X_n^2]^{1/2}$ *sowie A37(c).*

(b) Folgern Sie mittels (a) die Variante des starken Gesetzes der großen Zahlen: Seien $\varepsilon_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\varepsilon_k = 0$ und $\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_k^2]}{k^2} < \infty$. Dann gilt $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \to 0$ f.s.

Aufgabe 86.
Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$. Sei $F : [0,1) \to \mathbb{R}$

Lipschitz-stetig (und daher beschränkt). In dieser Aufgabe zeigen wir mit Hilfe der Martingaltheorie, dass eine messbare Abbildung $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ existiert mit $F(x) - F(0) = \int_{[0,x)} f \, d\lambda$ für alle $x \in [0, 1)$ (*).
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathcal{F}_n := A\Big(\Big\{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}), k \in \{1, ..., 2^n\}\Big\}\Big), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und Zufallsvariablen

$$a_n := \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \mathbb{I}_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(\cdot), \qquad X_n := \frac{F(a_n + 2^{-n}) - F(a_n)}{2^{-n}}.$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) $a_{n+1} \in \{a_n, a_n + 2^{-(n+1)}\}$ und $\mathbb{P}(a_{n+1} = a_n | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(a_{n+1} = a_n + 2^{-(n+1)} | \mathcal{F}_n)$.

(b) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.
Hinweis: Nutzen Sie $1 = \mathbb{I}_{\{a_{n+1} = a_n\}} + \mathbb{I}_{\{a_{n+1} = a_n + 2^{-(n+1)}\}}$ *zur Berechnung von* $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} \cdot 1 | \mathcal{F}_n]$.

(c) $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

(d) Es gibt eine Zufallsvariable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X_n = \mathbb{E}[f | \mathcal{F}_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(e) f erfüllt (*).
Hinweis: Für jedes $x \in [0, 1)$ *existiert eine Folge* $x_n \to x$ *mit* $x_n = \frac{k_n}{2^n}$, $k_n \in \{1, ..., 2^n\}$.

Aufgabe 87.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $U_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(U_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(U_n = 0)$. Sei $\tau := \inf\{n \geq 1 : U_n = 1\}$. Definiere $X_n := (1 - p)^{-n} \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}$.
Zeigen Sie:

(a) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(U_k : k \leq n)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\tau \sim$ *Geo*(p).

(b) $X_n \to 0$ f.s.
Hinweis: Nutzen Sie den Martingalkonvergenzsatz 5.22.

(c) X_n konvergiert nicht im 1.-ten Mittel.

(d) $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 88.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Zufallsvariablen. Definiere $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_k : k \leq n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{E}Y_n = 0, \mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$. Zeigen Sie:

$$\forall x > 0 : \quad \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} Y_k > x\right) \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{x^2}$$

Hinweis: Wenden Sie die Funktion $\phi(x) = x^2$ *auf beiden Seiten der Ungleichung in* $\mathbb{P}(\cdot)$ *an. Nutzen Sie dann A37(b) (warum wird die Voraussetzung* ϕ *monoton wachsend nicht benötigt?) und die Doob-Ungleichung.*

(b) Es sei nun $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i.i.d. und es gelte $\mathbb{P}(Y_0 = 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = \frac{1}{2}$. Definiere $X_n := -2^n Y_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist und das keine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit $\mathbb{E}|X| < \infty$ und $X_n \to X$ $\mathbb{P}$-f.s. Welche Voraussetzung des Martingalkonvergenzsatzes 5.23 ist verletzt?

Aufgabe 89.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $\varepsilon_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k}$ (als Reihe) f.s. konvergiert.
Bemerkung: Das bedeutet, dass die Reihe $1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm ...$ *konvergiert, wenn die Vorzeichen zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt werden.*

Aufgabe 90.

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda)$. Sei $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Für $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{1, ..., 2^n\}$ sei

$$\mathcal{F}_n := A\Big(\Big\{I_{n,k}, k \in \{1,...,2^n\}\Big\}\Big), \qquad I_{n,k} := [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}),$$

und

$$X_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \int_{I_{n,k}} f \ \mathrm{d}\lambda \cdot \mathbb{I}_{I_{n,k}}(\cdot).$$

Zeigen Sie:

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

(c) Es gibt eine Zufallsvariable $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X_n = \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Man kann $g = f$ wählen und es gilt $X_n \to f$ f.s.

Aufgabe 91.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ mit $p \in (0,1)$, wobei $\mathrm{Geo}(p)$ die Dichte $f(k) = p \cdot (1-p)^k \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(k)$ bzgl. des Zählmaßes μ_Z auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ besitzt.

  (i) Berechnen Sie die charakteristische Funktion ϕ_X.

  (ii) Für X ist bekannt, dass $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Ermitteln Sie mit der Momentenformel $\mathbb{E}X$.

(b) Sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

  (i) Ermitteln Sie ϕ_X.
  Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass für $z \in \mathbb{C}$ *mit* $Re(z) < 0$ *gilt:* $\int_0^\infty e^{xz} dx = -\frac{1}{z}$.

  (ii) Für X ist bekannt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Zeigen Sie mit der Momentenformel, dass $\mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$.

Aufgabe 92.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Sei $N : \Omega \to \mathbb{N}$ eine von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariable.

(a) Sei X_n, $n \in \mathbb{N}$ i.i.d. und $X := \sum_{i=1}^{N} X_i$. Zeigen Sie dass die charakteristische Funktion von X gegeben ist durch

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[\phi_{X_1}(t)^N].$$

(b) Sei $X_1 \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$ und $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie mittels (a), dass $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda p)$.

(c) Seien nun $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängig mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Ermitteln Sie $\phi_{X_1+X_2}$ und daraus die Verteilung von $X_1 + X_2$.

Aufgabe 93.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\delta_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(\delta_1 = 1) = \mathbb{P}(\delta_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Sei $X_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{2^i}$.

(a) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion von X_n durch

$$\phi_{X_n}(t) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin(t)}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \quad (t \neq 0), \qquad \phi_{X_n}(0) = 1$$

gegeben ist.
Hinweis: Nutzen Sie die Regel $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ *für* $x \in \mathbb{R}$. *Es entsteht ein Teleskopprodukt.*

(b) Sei $X \sim U[-1, 1]$ eine auf $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie $\phi_X(t)$ und zeigen Sie, dass für X_n aus (a) gilt: $X_n \xrightarrow{D} X$.

Aufgabe 94.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen.

(a) Seien $Y_n \sim \mathrm{Geo}(p_n)$ geometrisch verteilt mit Parametern $p_n \in (0, 1)$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} np_n \to c \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass $\frac{Y_n}{n}$ schwach konvergiert und bestimmen Sie den Limes.
Hinweis: Es ist $\lim_{n\to\infty} n \cdot (e^{x/n} - 1) = x$ *für* $x \in \mathbb{C}$. *Nutzen Sie die charakteristischen Funktionen aus A45.*

(b) Seien $Y_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$ exponentialverteilt, wobei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen ist.

  (i) Es gelte $\lambda_n \to \lambda \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: $Y_n \xrightarrow{D} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

  (ii) Es gelte $\lambda_n \to 0$. Zeigen Sie mittels der Definition: $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht straff. Folgern Sie: Y_n konvergiert nicht in Verteilung.

  (iii) Wogegen konvergiert Y_n für $\lambda_n \to \infty$?

  Hinweis: Nutzen Sie charakteristischen Funktionen aus A45.

Aufgabe 95.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $X \sim U[0, a]$ mit $a > 0$.

(i) Berechnen Sie die charakteristische Funktion ϕ_X.

(ii) Ermitteln Sie mit der Momentenformel $\mathbb{E}X$.

(b) Sei $X \sim \text{Bin}(n,p)$ mit $p \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Berechnen Sie $\phi_{\text{Bin}(1,p)}$.

(ii) Ermitteln Sie ϕ_X.
Hinweis: Nutzen Sie die Faltungseigenschaft der Binomialverteilung: Falls $X_1, ..., X_n \sim$ Bin$(1,p)$ i.i.d., so ist $\sum_{k=1}^n X_k \sim$ Bin(n,p).

(iii) Ermitteln Sie mit der Momentenformel $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}[X^2]$.

Aufgabe 96.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Sei $N : \Omega \to \mathbb{N}$ eine von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariable.

(a) Sei $X := X_N$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion von X gegeben ist durch

$$\phi_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \cdot \phi_{X_n}(t).$$

Was ist die Verteilung von X im Falle, dass alle X_n, $n \in \mathbb{N}$ identisch verteilt sind?

(b) Seien nun $X_1 \sim \text{Poi}(\lambda)$, $X_2 \sim \text{Poi}(\mu)$ unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern $\lambda, \mu > 0$. Ermitteln Sie $\phi_{X_1+X_2}$ und daraus die Verteilung von $X_1 + X_2$.

Aufgabe 97.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen. Definiere $S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion ϕ_{S_n} in Abhängigkeit von ϕ_{X_1}.

(b) Sei nun $X_1 \sim \text{Cauchy}(0,1)$ mit charakteristischer Funktion $\phi_{X_1}(t) = e^{-|t|}$. Zeigen Sie, dass $S_n \xrightarrow{D} X_1$. Wieso ist das kein Widerspruch zum starken Gesetz der großen Zahlen?

(c) Sei nun $X_1 \sim N(0,1)$. Zeigen Sie, dass $\phi_{S_n}(t) \to 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Was folgt für die Konvergenz von S_n?
Hinweis: Für $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ gilt $\phi_{N(\mu,\sigma^2)}(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Aufgabe 98.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen. Zur Lösung der Aufgaben sollen Sie den Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen nutzen.

(a) Seien $Y_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ Binomialverteilt mit Parametern $p_n \in (0,1)$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} np_n \to c \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass Y_n schwach konvergiert und bestimmen Sie den Limes.
Hinweis: Für Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{C}$ gilt $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x_n}{n})^n = e^x$.

(b) Seien $Y_n \sim U[0, a_n]$ gleichverteilt auf $[0, a_n]$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen ist.

(i) Es gelte $a_n \to a$. Zeigen Sie: $Y_n \xrightarrow{D} U[0,a]$.

(ii) Es gelte $a_n \to \infty$. Zeigen Sie mittels der Definition: $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht straff. Folgern Sie: Y_n konvergiert nicht in Verteilung.

2 Lösungen

Lösung 1.

Lösung:

(a) Zu zeigen sind für $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ die drei Eigenschaften einer σ-Algebra:

- Für alle $i \in I$ ist $\Omega \in \mathcal{A}_i$, da $\mathcal{A}_i$ σ-Algebra. $\Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$.
- Sei $A \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. $\overset{\mathcal{A}_i\ \sigma\text{-Algebra}}{\Rightarrow} A^c \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$.
- Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i \Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$, $i \in I$ gilt $A_n \in \mathcal{A}_i \overset{\mathcal{A}_i\ \sigma\text{-Algebra}}{\Rightarrow}$ Für alle $i \in I$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

(b) Wähle $\Omega = \{1,2,3,4\}$,

$$\mathcal{A}_1 = A(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \Omega\}, \qquad \mathcal{A}_2 = A(\{1,3\}) = \{\emptyset, \{1,3\}, \{2,4\}, \Omega\}.$$

Dann sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-Algebren (klar), aber

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \Omega\}$$

ist keine σ-Algebra, da $\{1,2\}, \{1,3\} \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, aber $\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Widerspruch zur σ-Additivität.

(c) Zu zeigen sind für $\mathcal{B} = f^{-1}(\mathcal{A})$ die drei Eigenschaften einer σ-Algebra über $\mathcal{X}$. Im Wesentlichen 'vererben' sich diese direkt von $\mathcal{A}$:

- $\mathcal{A}$ σ-Algebra über $\Omega \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{X} = f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{B}$.
- Sei $B \in \mathcal{B} \Rightarrow$ Es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $B = f^{-1}(A) \overset{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}{\Rightarrow} A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c = f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{B}$.
- Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B} \Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $A_n \in \mathcal{A}$ mit $B_n = f^{-1}(A_n) \overset{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}{\Rightarrow} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{B}$.

Lösung 2.

Lösung: Eine allgemeine Strategie findet sich in der Lösung von Präsenzblatt 1, P2.

(a)
- $\{1,2\}, \{1,2,3,4\} \in \mathcal{E} \Rightarrow \{3,4\} = \{1,2,3,4\}\backslash\{1,2\} \in A(\mathcal{E})$
  $\Rightarrow \{5\} = \Omega\backslash\{1,2,3,4\} \in A(\mathcal{E})$.
  Alle weiteren Elemente aus $A(\mathcal{E})$ entstehen durch Vereinigung von $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5\}$. Explizite Angabe:

$$A(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \{5\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \Omega\}.$$

- $(0,3], (1,4] \in \mathcal{E} \Rightarrow (1,3] = (0,3] \cap (1,4] \in A(\mathcal{E})$
  $\Rightarrow (3,4] = \Omega\backslash(0,3] \in A(\mathcal{E})$
  $\Rightarrow (0,1] = \Omega\backslash(1,4] \in A(\mathcal{E})$
  Alle weiteren Elemente aus $A(\mathcal{E})$ entstehen durch Vereinigung von $(0,1], (1,3], (3,4]$ (Komplemente sind dann auch enthalten). Explizite Angabe:

$$A(\mathcal{E}) = \{\emptyset, (0,1], (3,4], (1,3], (0,1] \cup (3,4], (0,3], (1,4], \Omega\}.$$

- Wir zeigen $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Es genügt zu zeigen: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset A(\mathcal{E})$.
Offensichtlich $\{1\} \in \mathcal{E}$. Weiter für $k \geq 2$, $\{k\} = \{1, ..., k\} \setminus \{1, ..., k-1\} \in A(\mathcal{E})$.
$\Rightarrow$ Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\{k\} \in A(\mathcal{E})$.
Sei $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ beliebig $\Rightarrow A = \bigcup_{k \in A} \{k\} \in A(\mathcal{E})$. Damit ist gezeigt: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset A(\mathcal{E})$.

(b) Nachzurechnen sind die drei Eigenschaften einer σ-Algebra über Ω:

- $\Omega^c = \emptyset$ ist abzählbar $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$.
- Sei $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A$ oder A^c abzählbar $\Rightarrow (A^c)^c$ oder A^c abzählbar $\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
- Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist A_n oder A_n^c abzählbar
Fall 1: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist A_n abzählbar $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist abzählbar (abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen) $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
Fall 2: Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass A_N nicht abzählbar $\Rightarrow A_N^c$ abzählbar $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c$ abzählbar $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Lösung 3.
Lösung:

(a) Wir zeigen die zwei Teilmengenbeziehungen zusammen mit dem Hinweis ganz unten.

- '$\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}_B)$': Sei $A = (a, b) \in \mathcal{E} \Rightarrow A$ offen $\Rightarrow A \in \mathcal{E}_B \subset A(\mathcal{E}_B)$.
- '$\mathcal{E}_B \subset A(\mathcal{E})$': Sei $U \in \mathcal{E}_B$, d.h. U offen. $\Rightarrow$ Zu jedem $x \in U$ existiert $r_x > 0$ mit $(x - r_x, x + r_x) \subset U$. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R} \Rightarrow$ Es gibt $q_x \in (x - r_x/4, x + r_x/4) \cap \mathbb{Q}$. Wähle $s_x \in (r_x/4, r_x/2) \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $(q_x - s_x, q_x + s_x) \subset (q_x - r_x/2, q_x + r_x/2) \subset (x - 3r_x/4, x + 3r_x/4) \subset U$, und $x \in (q_x - s_x, q_x + s_x)$ wegen $s_x > r_x/4$, $q_x \in (x - r_x/4, x + r_x/4)$.
$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} (q_x - s_x, q_x + s_x)$.
Es werden nur abzählbar viele Mengen vereinigt, da $\{(q_x - s_x, q_x + s_x) : x \in U\} \subset \{q - s, q + s) : q \in \mathbb{Q}, s \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}\}$.
$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} (q_x - s_x, q_x + s_x) \in A(\mathcal{E})$.

(b) Wir zeigen $A(\mathcal{E}_1) = A(\mathcal{E}_2) = A(\mathcal{E}_3) = A(\mathcal{E})$ per Ringschluss

$$A(\mathcal{E}) \subset A(\mathcal{E}_1) \subset A(\mathcal{E}_2) \subset A(\mathcal{E}_3) \subset A(\mathcal{E}). \qquad (*)$$

- '$\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}_1)$': Sei $A = (a, b) \in \mathcal{E} \Rightarrow (a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, b - \frac{1}{n}] \in A(\mathcal{E}_1)$.
- '$\mathcal{E}_1 \subset A(\mathcal{E}_2)$': Sei $A = (a, b] \in \mathcal{E}_1 \Rightarrow (a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a] \in A(\mathcal{E}_2)$.
- '$\mathcal{E}_2 \subset A(\mathcal{E}_3)$': Sei $A = (-\infty, b] \in \mathcal{E}_2$. Sei $b_n \in \mathbb{Q}$ eine Folge mit $b_n \downarrow b$. $\Rightarrow (-\infty, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, b_n] \in A(\mathcal{E}_3)$.
- '$\mathcal{E}_3 \subset A(\mathcal{E})$': Sei $A = (-\infty, q] \in \mathcal{E}_3$. Sei OBdA $q < 0$. $\Rightarrow (q, \infty) = (q, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (n, n + 2) \in A(\mathcal{E}) \Rightarrow (-\infty, q] = (q, \infty)^c \in A(\mathcal{E})$.

(*) folgt nun mit dem Hinweis ganz unten.

Lösung 4.
Lösung:

(a) Zu zeigen sind zwei Teilmengenbeziehungen.

- '$A(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(A(\mathcal{E}))$': Wir zeigen 1) $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(A(\mathcal{E}))$ und 2) $f^{-1}(A(\mathcal{E}))$ ist eine σ-Algebra. Dann folgt:

$$A(f^{-1}(\mathcal{E})) \overset{1)}{\subset} A(f^{-1}(A(\mathcal{E}))) \overset{2)}{=} f^{-1}(A(\mathcal{E})).$$

  - Nachweis 1): $\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(A(\mathcal{E}))$.
  - Nachweis 2): Dies folgt direkt aus Blatt 1, A1(c).

- '$A(f^{-1}(\mathcal{E})) \supset f^{-1}(A(\mathcal{E}))$': Wir verwenden einen Trick ('Prinzip der guten Mengen'): Definiere

$$\mathcal{C} := \{C \in A(\mathcal{E}) : f^{-1}(C) \in A(f^{-1}(\mathcal{E}))\}.$$

  Wir zeigen: $A(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}$. (Dann: $f^{-1}(C) \in A(f^{-1}(\mathcal{E}))$ für alle $C \in A(\mathcal{E})$, d.h. $f^{-1}(A(\mathcal{E})) \subset A(f^{-1}(\mathcal{E}))$).

  Dazu zeigen wir: 1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ und 2) $\mathcal{C}$ ist σ-Algebra. Dann folgt nämlich

$$A(\mathcal{E}) \overset{1)}{\subset} A(\mathcal{C}) \overset{2)}{=} \mathcal{C}.$$

  - Nachweis 1): Sei $E \in \mathcal{E} \Rightarrow f^{-1}(E) \in f^{-1}(\mathcal{E}) \subset A(f^{-1}(\mathcal{E})) \Rightarrow E \in \mathcal{C}$.
  - Nachweis 2): Dies folgt aus Präsenzblatt 1, P1(c).

(b) Wähle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - c$. $\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} + c = f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
Für $\mathcal{E} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ gilt $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = A(\mathcal{E})$ (vgl. Aufgabe 3).
Wir zeigen nun: $f^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ (*). Dann folgt

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + c = f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = f^{-1}(A(\mathcal{E})) \overset{(a)}{=} A(f^{-1}(\mathcal{E})) \overset{(*)}{=} A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Nachweis von (*):

- '$\subset$': Sei $A \in f^{-1}(\mathcal{E}) \Rightarrow$ Es gibt $(a, b) \in \mathcal{E}$ mit $A = f^{-1}((a, b)) = (a + c, b + c) \in \mathcal{E}$.
- '$\supset$': Sei $(a, b) \in \mathcal{E} \Rightarrow f((a, b)) = (a - c, b - c) \in \mathcal{E} \Rightarrow (a, b) \in f^{-1}(\mathcal{E})$.

Lösung 5.

Lösung:

(a) Wähle $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und

$$\gamma_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}, \qquad \gamma_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Dann sind γ_1, γ_2 Semialgebren über Ω, denn:

- $\Omega \in \gamma_1, \gamma_2$ klar.
- Alle Schnitte von Elementen aus γ_i ergeben entweder $\emptyset$ oder Ω und sind daher wieder in γ_i enthalten ($i = 1, 2$)
- Für γ_1 gilt: $\{1\}^c = \{2, 3\} \in \gamma_1$, $\{2, 3\}^c = \{1\} \in \gamma_1$,
  für γ_2 gilt: $\{1\}^c = \{2\} \cup \{3\}$ mit $\{2\}, \{3\} \in \gamma_2$, für $\{2\}^c, \{3\}^c$ analog.

Aber $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}\}$ ist keine Semialgebra über Ω, da $\{1\}^c = \{2, 3\}$ nicht als disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\gamma_1 \cap \gamma_2$ dargestellt werden kann.

(b) Zu zeigen sind für $\mathcal{A}$ die drei Eigenschaften einer σ-Algebra über Ω:

- $\mathcal{C}$ σ-Algebra über $\mathcal{X} \Rightarrow f^{-1}(\Omega) = \mathcal{X} \in \mathcal{C} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$.
- Sei $A \in \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}\ \sigma\text{-Algebra}}{\Rightarrow} f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$. |item Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{C} \overset{\mathcal{C}\ \sigma\text{-Algebra}}{\Rightarrow} f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

(c) Zu zeigen sind die drei Eigenschaften einer σ-Algebra über T:

- $\mathcal{A}$ σ-Algebra $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow T = \Omega \cap T \in \mathcal{A}_T$.
- Sei $B \in \mathcal{A}_T \Rightarrow B = A \cap T$ mit $A \in \mathcal{A} \overset{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}{\Rightarrow} A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$. Dann ist (Achtung, Grundmenge T!) $B^c = T\backslash B = T\backslash A = T \cap (T\backslash A) = T \cap (\Omega\backslash A) \in \mathcal{A}_T$.
- Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_T \Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $A_n \in \mathcal{A}$ mit $B_n = A_n \cap T$. $\Rightarrow$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \underbrace{\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)}_{\in\mathcal{A}} \cap T \in \mathcal{A}_T$.

Alternative: Nutze Übungsblatt 1(c) mit $f : T \to \Omega$, $f(x) = x$. Dann ist $\mathcal{A}_T = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra.

Lösung 6.

Lösung: Allgemeine Strategie: Versuche zunächst, möglichst 'einfache' Mengen mit möglichst wenig Elementen aus den gegebenen erzeugenden Mengen zu konstruieren (mit Hilfe der (σ-)Algebren-Eigenschaften). Danach können viele weitere Elemente der erzeugten ($\sigma-$)Algebra durch Vereinigung erhalten werden und so eine Vermutung über die Gestalt der erzeugten ($\sigma-$)Algebra aufgestellt werden. Wenn nicht offensichtlich ist, dass die aufgestellte Vermutung die erzeugte (σ-)Algebra ist, muss dies noch nachgewiesen werden.

(a)
- $B_1, B_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \{2\} = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{A}$.
  $\Rightarrow \{1\} = B_1\backslash\{2\} \in \mathcal{A}$, $\{3\} = B_2\backslash\{2\} \in \mathcal{A}$.
  $\Rightarrow \{4\} = \Omega\backslash(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) \in \mathcal{A}$.
  Mit endlichen Vereinigungen kann aus $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ nun jede Teilmenge von Ω konstruiert werden
  $\Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- $B_1, B_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \{2, 3\} = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{A}$.
  $\Rightarrow \{1\} = B_1\backslash\{2, 3\} \in \mathcal{A}$, $\{4\} = \Omega\backslash B_1 \in \mathcal{A}$.
  $\{2, 3\}$ können nicht weiter aufgetrennt werden.
  Damit ist

  $$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \{2, 3\} \subset A \text{ oder } \{2, 3\} \in A^c\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}.$$

- Für alle $k \in \{2, ..., n\}$ ist $\{1, k\} \in \mathcal{E}$.
  $\Rightarrow \{1\} = \{1, 2\} \cap \{1, 3\} \in A(\mathcal{E})$
  $\Rightarrow \{k\} = \{1, k\}\backslash\{1\} \in A(\mathcal{E})$ für $k \in \{2, ..., n\}$.
  Mit endlichen Vereinigungen kann aus $\{1\}, ..., \{n\}$ nun jede Teilmenge von Ω konstruiert werden
  $\Rightarrow$ Vermutung: $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$.
  Beweis: '$\supset$' haben wir soeben gezeigt.
  '$\subset$': ist klar, da $A(\mathcal{E})$ stets Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist $\{n\} = \{n-1, n\} \cap \{n, n+1\} \in G(\mathcal{E})$.
  $\Rightarrow \{1\} = \{1,2\} \backslash \{2\} \in G(\mathcal{E})$
  Mit endlichen Vereinigungen kann aus $\{k\}$, $k \in \mathbb{N}$ jede endliche Teilmenge von Ω konstruiert werden; durch Komplementbildung ist auch jede Menge enthalten, deren Komplement endlich ist.
  $\Rightarrow$ Vermutung:
  $$G(\mathcal{E}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich} =: \mathcal{G}$$
  Beweis: '$\supset$' haben wir soeben gezeigt.
  '$\subset$': Dafür genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{G}$ eine Algebra mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ ist. (dann folgt $G(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{G}\text{Algebra mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{G}'} \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, da man $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$ im Schnitt wählen kann).

  - $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ ist klar, da $A \in E \Rightarrow A = \{n, n+1\}$ für ein $n \in \mathbb{N} \Rightarrow A$ endlich $\Rightarrow A \in \mathcal{G}$.
  - $\mathcal{G}$ ist eine Algebra über $\Omega = \mathbb{N}$, denn:
    * $\mathbb{N}^c = \emptyset$ ist endlich $\Rightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{G}$.
    * $A \in \mathcal{G} \Rightarrow A$ oder A^c endlich $\Rightarrow (A^c)^c$ endlich oder A^c endlich $\Rightarrow A^c \in \mathcal{G}$.
    * $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A$ oder A^c endlich, B oder B^c endlich.
      Fall 1: A, B endlich $\Rightarrow A \cup B$ endlich $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{G}$.
      Fall 2: eine der Mengen A, B nicht endlich $\Rightarrow A^c$ oder B^c endlich $\Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ endlich $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{G}$.

Lösung 7.

Lösung:

(a) Wir zeigen zunächst $A(\mathcal{E}_1) = A(\mathcal{E}_2) = A(\mathcal{E}_3) = A(\mathcal{E})$ per Ringschluss
$$A(\mathcal{E}) \subset A(\mathcal{E}_1) \subset A(\mathcal{E}_2) \subset A(\mathcal{E}_3) \subset A(\mathcal{E}_B) \qquad (*)$$
Da bereits bekannt ist, dass $A(\mathcal{E}) = A(\mathcal{E}_B)$, folgt damit dann die Behauptung.

- '$\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}_1)$': Sei $A = (a,b) \in \mathcal{E} \Rightarrow (a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \in A(\mathcal{E}_1)$.
- '$\mathcal{E}_1 \subset A(\mathcal{E}_2)$': Sei $A = [a,b] \in \mathcal{E}_1$. Seien $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ Folgen mit $b_n \downarrow b$, $a_n \uparrow b \Rightarrow [a,b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \in A(\mathcal{E}_2)$.
- '$\mathcal{E}_2 \subset A(\mathcal{E}_3)$': Sei $A = [a,b] \in \mathcal{E}_2$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. $\Rightarrow A$ kompakt $\Rightarrow A \in \mathcal{E}_3 \subset A(\mathcal{E}_3)$.
- '$\mathcal{E}_3 \subset A(\mathcal{E}_B)$': Sei $A \in \mathcal{E}_3$, d.h. A kompakt $\Rightarrow A$ abgeschlossen $\Rightarrow A^c$ offen $\Rightarrow A \in A(\mathcal{E}_B)$.

(*) folgt nun mit dem Hinweis ganz unten.

Lösung 8.

Lösung:

(a) Zu zeigen sind zwei Teilmengenbeziehungen. Wir wählen das Erzeugendensystem $\mathcal{E} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{B}_\mathbb{R}$.

- '$\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$': Wir zeigen 1) $\mathcal{E} \subset c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$ und 2) $c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$ ist eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Dann folgt:
  $$\mathcal{B}_\mathbb{R} = A(\mathcal{E}) \overset{1)}{\subset} A(c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}) \overset{2)}{=} c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}.$$

- Nachweis 1): Sei $(a,b) \in \mathcal{E}$. Es gilt $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) \in \mathcal{B}_\mathbb{R} \Rightarrow (a,b) = c \cdot (\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) \in c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$.
- Nachweis 2): Nachzurechnen sind die drei Eigenschaften einer σ-Algebra:
  * $\mathbb{R} = c \cdot \mathbb{R} \in c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$.
  * $A \in c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R} \Rightarrow A = cB$ mit einem $B \in \mathcal{B}_\mathbb{R} \Rightarrow A^c = cB^c \in c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$ (da $B^c \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$).
  * $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R} \Rightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $B_n \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ mit $A_n = c \cdot B_n \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = c \cdot \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$ (da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$).

- '$\mathcal{B}_\mathbb{R} \supset c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R}$': Wir verwenden einen Trick ('Prinzip der guten Mengen'): Definiere

$$\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : c \cdot B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}.$$

Wir zeigen: $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{C}$. (Dann: $cB \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ für alle $B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, d.h. $c \cdot \mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$).

Dazu zeigen wir: 1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ und 2) $\mathcal{C}$ ist σ-Algebra. Dann folgt nämlich

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} = A(\mathcal{E}) \overset{1)}{\subset} A(\mathcal{C}) \overset{2)}{=} \mathcal{C}.$$

- Nachweis 1): Sei $(a,b) \in \mathcal{E} \Rightarrow c \cdot (a,b) = (ac, bc) \in \mathcal{B}_\mathbb{R} \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{C}$.
- Nachweis 2): Dies folgt ähnlich wie oben in Nachweis 2).

Alternative Beweismöglichkeit: Nachweis wie in Abgabeblatt 1, A4(b) mittels A4(a) und $f(x) = \frac{x}{c}$.

(b) Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es existieren $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ mit $\omega \neq \tilde{\omega}$ und für alle $E \in \mathcal{E}$ gilt $\mathbb{I}_E(\omega) = \mathbb{I}_E(\tilde{\omega})$. Definiere

$$\mathcal{B} := \{A \in A(\mathcal{E}) : \mathbb{I}_A(\omega) = \mathbb{I}_A(\tilde{\omega})\} = \{A \in A(\mathcal{E}) : \omega, \tilde{\omega} \in A \text{ oder } \omega, \tilde{\omega} \in A^c\}.$$

Dann ist $\{\omega\} \notin \mathcal{B}$ (per Definition von $\mathcal{B}$), $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ (Widerspruchsannahme), und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra über Ω, denn:

- $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega \Rightarrow \Omega \in \mathcal{B}$,
- $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \omega, \tilde{\omega} \in A$ oder $\omega, \tilde{\omega} \in A^c \Rightarrow \omega, \tilde{\omega} \in (A^c)^c$ oder $\omega, \tilde{\omega} \in A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$,
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B} \Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\omega, \tilde{\omega} \in A_n$ oder $\omega, \tilde{\omega} \in A_n^c$.
  Fall 1: $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\omega, \tilde{\omega} \in A_N \Rightarrow \omega, \tilde{\omega} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.
  Fall 2: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\omega, \tilde{\omega} \in A_n^c \Rightarrow \omega, \tilde{\omega} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Damit folgt

$$\mathcal{P}(\Omega) = A(\mathcal{E}) \overset{\mathcal{E}\subset\mathcal{B}}{\subset} A(\mathcal{B}) \overset{\mathcal{B}\sigma\text{-Algebra}}{=} \mathcal{B}.$$

Das ist ein Widerspruch zur $\{\omega\} \notin \mathcal{B}$.

Lösung 9.

Lösung:

(a) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$. Dann gilt:

$$\mu(B) \overset{A\subset B}{=} \mu(A \dot\cup (B \backslash A)) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \overset{\text{Nichtnegativität Maß: } \mu \geq 0}{\geq} \mu(A)$$

(b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Dann definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ (wobei $A_0 := \emptyset$). Damit gilt

$$\text{die } B_n \text{ sind paarweise disjunkt}, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N} : B_n \subset A_n.$$

Mit diesen Hilfsmitteln folgern wir:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n\right) \overset{\sigma\text{-Add. Maß}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \overset{B_n \subset A_n \text{ und (a)}}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

(c) *Gegenbeispiel:* Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist. Die Mengen $A_n := \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} = \{n, n+1, n+2, ...\}$ erfüllen:

$$\mu(A_n) = \#A_n = \infty, \qquad \forall n \in \mathbb{N} : A_n \supset A_{n+1}, \qquad A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset,$$

d.h. alle Voraussetzungen bis auf $\mu(A_1) < \infty$ sind erfüllt. Es gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty \neq 0 = \mu(\emptyset) = \mu(A).$$

Lösung 10.

Lösung: (a) Für $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}, m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ gilt

$$\begin{aligned} n \cdot \mu\left(\left(0, \frac{m}{n}\right]\right) &\overset{\mu \text{ translat.-inv.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\left(m\frac{i-1}{n}, m\frac{i}{n}\right]\right) \\ &\overset{\mu \text{ Maß}}{=} \mu((0, m]) \overset{\mu \text{ Maß}}{=} \sum_{i=1}^{m} \mu((i-1, i]) \\ &\overset{\mu \text{ translat.-inv.}}{=} m \cdot \mu((0, 1]). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\mu\left(\left(0, \frac{m}{n}\right]\right) = \frac{m}{n} \cdot \mu((0, 1]),$$

bzw. für jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}, q > 0$:

$$\mu((0, q]) = q \cdot \mu((0, 1]).$$

(b) Nun sei $r \in \mathbb{R}, r > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Es existiert eine monoton fallende Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ von rationalen Zahlen $q_n > 0$ mit $q_n \downarrow r$. Die Mengenfolge $(0, q_n]_{n\in\mathbb{N}}$ ist antiton, daher gilt mit der Stetigkeit des Maßes von oben, $\mu((0, q_1]) \leq \mu([0, q_1]) < \infty$ (μ Borel-Maß) und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, q_n] = (0, r]$:

$$\mu((0, r]) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, q_n]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu((0, q_n]) \overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} \left[q_n \cdot \mu((0, 1])\right] = r \cdot \mu((0, 1]).$$

Für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ beliebig folgt

$$\mu((a, b]) \overset{\mu \text{ translat.-inv.}}{=} \mu((0, b-a]) = (b-a) \cdot \mu((0, 1]).$$

(c) Mit $c_\mu := \mu((0,1]) \in [0,\infty)$ gilt für alle $(a,b] \in \mathcal{E} := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ wegen (b):

$$\mu((a,b]) = \mu((0,1]) \cdot (b-a) = c_\mu \cdot \lambda((a,b]). \tag{1}$$

Laut Voraussetzung ist μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Laut Hinweis ist $c_\mu \cdot \lambda$ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. (1) bedeutet, dass

$$\mu(A) = c_\mu \cdot \lambda(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{E}.$$

Es ist bekannt, dass $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ ist. Weiterhin gilt

$$\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (z, z+1], \qquad (z, z+1] \in \mathcal{E},$$

und $\mu((z,z+1]) = \mu((0,1]) < \infty, \lambda((z,z+1]) = 1 < \infty$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ ist auch die letzte Voraussetzung von Satz 1.21(a) erfüllt. Es folgt $\mu = c_\mu \cdot \lambda$ auf $\mathcal{B}_\mathbb{R}$.

Lösung 11.

Lösung: (a)

- Zeige $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$: Wir wissen, dass $\{\{a,b\},\{b,c\}\} = \mathcal{E} \subset A(\mathcal{E})$. Damit $\{b\} = \{a,b\} \cap \{b,c\} \in A(\mathcal{E})$, $\{a\} = \{a,b\} \backslash \{b,c\} \in A(\mathcal{E})$, $\{c\} = \{b,c\} \backslash \{a,b\} \in A(\mathcal{E})$, $\{d\} = \Omega \backslash (\{a,b\} \cup \{b,c\}) \in A(\mathcal{E})$.
  Ω endlich $\Rightarrow$ Für beliebiges $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt $A = \bigcup_{k \in A} \{k\} \in A(\mathcal{E})$.
  $\Rightarrow A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$.

- Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_1, μ_2 auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$: Die Maße μ_1, μ_2 sind durch Angabe ihrer Werte auf $\Omega = \{a,b,c,d\}$ eindeutig bestimmt. Wir wählen:

  $$\mu_1(\{a\}) = \mu_1(\{b\}) = \mu_1(\{c\}) = \mu_1(\{d\}) = \frac{1}{4},$$

  sowie

  $$\mu_2(\{a\}) = \mu_2(\{c\}) = 0, \qquad \mu_2(\{b\}) = \mu_2(\{d\}) = \frac{1}{2}.$$

  Dann gilt tatsächlich $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) = 1$, d.h. μ_1, μ_2 sind Wahrscheinlichkeitsmaße. Weiter ist

  $$\begin{array}{rcccccccl} \mu_1(\{a,b\}) &=& \mu_1(\{a\}) + \mu_1(\{b\}) &=& \frac{1}{2} &=& \mu_2(\{a\}) + \mu_2(\{b\}) &=& \mu_2(\{a,b\}), \\ \mu_1(\{b,c\}) &=& \mu_1(\{b\}) + \mu_1(\{c\}) &=& \frac{1}{2} &=& \mu_2(\{b\}) + \mu_2(\{c\}) &=& \mu_2(\{b,c\}), \end{array}$$

  also $\forall E \in \mathcal{E} : \mu_1(E) = \mu_2(E)$, aber offensichtlich sich μ_1, μ_2 nicht identisch auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

- Satz (1.21) ist hier nicht anwendbar, weil $\mathcal{E}$ nicht $\cap$-stabil ist: Es ist $\{a,b\}, \{b,c\} \in \mathcal{E}$, aber $\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\} \notin \mathcal{E}$.

(b)

- Zeige $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$: Wir wissen, dass $\{E_n : n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{E} \subset A(\mathcal{E})$ ist, und dass $A(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.
  Wir schließen für $n \in \mathbb{Z}$:

  $$E_n, E_{n-1} \in A(\mathcal{E}) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\{n\}}} = \Big((-\infty, n] \cap \mathbb{Z}\Big) \cap \Big((n-1, \infty) \cap \mathbb{Z}\Big) = E_n \cap E_{n-1}^c \in A(\mathcal{E}).$$

Sei $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig. Dann gilt

$$A \quad = \quad \bigcup_{n \in A} \underbrace{\{n\}}_{\in A(\mathcal{E})} \quad \overset{A \text{ abzählbar, } A(\mathcal{E})\ \sigma\text{-Alg.}}{\in} \quad A(\mathcal{E}).$$

Damit folgt $\mathcal{P}(\Omega) = A(\mathcal{E})$.

- Definition von σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2 auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$: Wir definieren die Maße μ_1, μ_2 durch
$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega): \qquad \mu_1(A) := |A| \quad (\text{Zählmaß}) \qquad \mu_2(A) := 2 \cdot |A|.$$
Dann sind μ_1, μ_2 nicht identische Maße auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
Wählen wir $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\forall n \in \mathbb{Z} : A_n := \{n\}$, so gilt:
$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad \mu_1(A_n) = 1 < \infty, \quad \mu_2(A_n) = 2 < \infty, \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \Omega.$$
Das bedeutet, dass μ_1, μ_2 σ-endliche Maße sind.

- Satz (1.21.(a)) ist nicht anwendbar, denn: für je zwei Elemente $A, B \in \mathcal{E}$ gilt: $A \cap B \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$. Das bedeutet, das Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ enthält selbst keine disjunkte Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$. Mit anderen Worten: μ_1, μ_2 sind zwar σ-endlich auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, aber nicht auf $\mathcal{E}$.
Satz (1.21.(b)) ist nicht anwendbar, weil μ_1, μ_2 keine endlichen Maße sind.

Lösung 12.

Lösung:

(a) Zu zeigen sind die drei Eigenschaften einer Verteilungsfunktion:

(1) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$. Dann gilt $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$, und somit:
$$F_\mu(x) \quad = \quad \mu((-\infty, x]) \quad \overset{\text{Monotonie Maß A5(a)}}{\leq} \quad \mu((-\infty, y]) \quad = \quad F_\mu(y).$$
Also ist F_μ monoton wachsend.

(2) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge mit $x_n \searrow x_0$ $(n \to \infty)$. Dann ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ mit $A_n := (-\infty, x_n]$ eine Folge von Mengen mit:
$$A_{n+1} \subset A_n, \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-\infty, x_0], \qquad \mu(A_1) \overset{\mu \text{ W-Maß}}{\leq} 1 < \infty.$$
Damit folgt:
$$\lim_{n \to \infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \quad \overset{\text{Stetigkeit Maß von oben}}{=} \quad \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu((-\infty, x_0]) = F_\mu(x_0).$$

(3) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge mit $x_n \searrow -\infty$. Dann ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ mit $A_n := (-\infty, x_n]$ eine Folge von Mengen mit:
$$A_{n+1} \subset A_n, \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset, \qquad \mu(A_1) \overset{\mu \text{ W-Maß}}{\leq} 1 < \infty,$$

und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \overset{\text{Stetigkeit Maß von oben}}{=} \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(\emptyset) \overset{\mu \text{ Maß}}{=} 0.$$

Also ist $\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$.
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge mit $x_n \nearrow \infty$. Dann ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ mit $A_n := (-\infty, x_n]$ eine Folge von Mengen mit:

$$A_n \subset A_{n+1}, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$$

und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \overset{\text{Stetigkeit Maß von unten}}{=} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(\mathbb{R}) \overset{\mu \text{ W-Maß}}{=} 1.$$

Also ist $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = 1$.

(b)

- Sei μ ein W-Maß. Wir zeigen: $\mu_{(F_\mu)} = \mu$ auf $\mathcal{B}_\mathbb{R}$.
  Dazu zeigen wir: $\mu_{(F_\mu)} = \mu$ auf $\mathcal{E} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$. Da $\mu_{(F_\mu)}, \mu$ W-Maße ($\mu_{(F_\mu)}$ W-Maß nach 1.24(b)) und $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, folgt mit Maßfortsetzungssatz (Eindeutigkeit) 1.21(b): $\mu_{(F_\mu)} = \mu$ auf $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

  Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

  $$\mu_{F_\mu}((a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a) = \mu((-\infty, b]) - \mu((-\infty, a]) = \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) = \mu((a, b]).$$

- Sei F eine Verteilungsfunktion. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

  $$\begin{aligned} F_{\mu_F}(x) &= \mu_F((-\infty, x]) = \mu_F\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, x]\right) \\ &\overset{\text{Stetigkeit Maß von unten}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu_F((-n, x]) = \lim_{n\to\infty} \Big(F(x) - F(-n)\Big) \\ &\overset{F \text{ Vert.-Fkt., Eig. (3)}}{=} F(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt $F = F_{\mu_F}$ auf $\mathbb{R}$.

(c) F_1 ist stetig. Prop. 1.26 $\Rightarrow \mu_{F_1}(\{1, 3\}) = 0$,
$\mu_{F_1}([3, 5]) = \mu_{F_1}((3, 5]) = F_1(5) - F_1(3) = \int_3^5 e^{-y} \mathbb{I}_{\{y\geq 0\}} dy = [-e^{-y}]_3^5 = e^{-3} - e^{-5}$.

F_2 ist nicht stetig (d.h. wir müssen 'genauer' rechnen): Wir nutzen Regeln aus Prop 1.26 und Präsenzblatt 2, P8(a):

$$\mu_F([a, b]) = F(b) - \lim_{x\uparrow a} F(x), \mu_F(\{a\}) = F(a) - \lim_{x\uparrow a} F(x).$$

Damit:

$$\mu_{F_2}([3, 5]) = F_2(5) - \lim_{x\uparrow 3} F_2(x)$$

Hier ist $\lim_{x\uparrow 3} F_2(x) = F_2(2)$, d.h. $\mu_{F_2}([3, 5]) = F_2(5) - F_2(2) = 2^{-5} + 2^{-4} + 2^{-3}$.
Außerdem:

$$\mu_{F_2}(\{1, 3\}) = \mu_{F_2}(\{1\}) + \mu_{F_2}(\{3\}) = (F_2(1) - F_2(0)) + (F_2(3) - F_2(2)) = 2^{-1} + 2^{-3}.$$

Lösung 13.

Lösung:

(a) Es ist $B = (B\backslash A)\dot\cup(A \cap B)$ (disjunkte Vereinigung)
$\overset{\sigma\text{-Add. }\mu}{\Rightarrow} \mu(B) = \mu(B\backslash A) + \mu(A \cap B)$
$\overset{\mu(A\cap B)<\infty}{\Rightarrow} \mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(b) Es gilt $A \cup B = A\dot\cup(B\backslash(A \cap B))$ (disjunkte Vereinigung).
$\overset{\sigma\text{-Add. }\mu}{\Rightarrow} \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B\backslash(A \cap B))$
Fall 1: $\mu(A\cap B) < \infty$: (a) $\Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$, das ist die Behauptung.
Fall 2: $\mu(A \cap B) = \infty$: Blatt 2, A5(a) (Monotonie) $\Rightarrow \mu(A) \geq \mu(A \cap B) = \infty \Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \infty = \mu(A) + \mu(B)$.

(c) Konstruktion: $B_n := A_n\backslash A_{n-1}$ $(n \geq 2)$, $B_1 = A_1$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
σ-Additivität $\mu \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \mu\Big(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \{\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\} + \mu(A_1) \overset{\text{Teleskop}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Achtung bei Schritt (a): Hierfür müssen wir zu Beginn annehmen, dass $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty$. Dies ist auch sinnvoll: Angenommen es ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_N) = \infty$, so ist (Monotonie Blatt 2, A5(a)): $\mu(A_n) \geq \mu(A_N) = \infty$ für alle $n \geq N$ und $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq \mu(A_N) = \infty \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \infty = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Lösung 14.

Lösung:

(a) Es ist $[a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(a - \frac{1}{n}, b]$, daher mit der Stetigkeit von oben:

$$\mu_F([a, b]) = \lim_{n\to\infty} \mu_F((a - \frac{1}{n}, b]) = F(b) - \lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n}) = F(b) - \lim_{x\uparrow a} F(x).$$

Damit folgt direkt

$$\mu_F(\{a\}) = \mu_F([a, a]) = F(a) - \lim_{x\uparrow a} F(x).$$

(b)
- Da λ σ-additiv ist, gilt

$$\lambda((0, 1] \cup (2, 3]) = \lambda((0, 1]) + \lambda((2, 3]) = 1 + 1 = 2.$$

- Laut Proposition 1.26 gilt direkt $\lambda((1, 2)) = 2 - 1 = 1$.
- Es ist mit Stetigkeit des Maßes von unten:

$$\lambda((-\infty, 0]) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n, 0]\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda((-n, 0]) = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

(hier könnte man auch σ-Additivität benutzen).

- Es gilt direkt nach Proposition 1.26: $\lambda(\{0\}) = 0$.
- Es gilt mit der σ-Additivität und der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$:

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}}\lambda(\{q\}) \overset{\text{wie zuvor}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Q}} 0 = 0.$$

- Es gilt mit P5(a):

$$\lambda([0,1]\backslash\mathbb{Q}) = \lambda([0,1]) - \lambda([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 1,$$

  da $0 \leq \lambda([0,1]\cap\mathbb{Q}) \leq \lambda(\mathbb{Q}) = 0$ und $\lambda([0,1]) = \lambda((0,1]) = 1$.
- Es ist (zähle einfach die Elemente der Menge, vgl. Beispiel 1.25.):

$$\mu_Z(\{1,2,3\}) = |\{1,2,3\}| = 3, \qquad \mu_Z(\{n\in\mathbb{N} : n \text{ gerade}\}) = |\{n\in\mathbb{N} : n \text{ gerade}\}| = \infty.$$

(c) F_1 ist stetig. Prop. 1.26 $\Rightarrow \mu_{F_1}(\{2,3\}) = 0$,
$\mu_{F_1}([2,5]) = \mu_{F_1}((2,5]) = F_1(5) - F_1(2) = \int_2^5 \frac{1}{y^2}\mathbb{I}_{\{y\geq 1\}}dy = [-y^{-1}]_2^5 = 2^{-1} - 5^{-1}$.

F_2 ist nicht stetig (d.h. wir müssen 'genauer' rechnen): Wir nutzen Regeln aus Prop 1.26 und Präsenzblatt 2, P8(a):

$$\mu_F([a,b]) = F(b) - \lim_{x\uparrow a} F(x), \mu_F(\{a\}) = F(a) - \lim_{x\uparrow a} F(x).$$

Damit:

$$\mu_{F_2}([2,5]) = F_2(5) - \lim_{x\uparrow 2} F_2(x)$$

Hier ist $\lim_{x\uparrow 2} F_2(x) = F_2(1)$, d.h. $\mu_{F_2}([2,5]) = F_2(5) - F_2(1) = 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2$.
Außerdem:

$$\mu_{F_2}(\{2,3\}) = \mu_{F_2}(\{2\}) + \mu_{F_2}(\{3\}) = (F_2(2) - F_2(1)) + (F_2(3) - F_2(2)) = 2^2 + 3^2.$$

Lösung 15.

Lösung: Sei $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt.

(a) Zunächst definieren wir

$$\nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty], \quad \nu(B) := \lambda(B + c).$$

Trick: Wir zeigen, dass $\nu = \lambda$ auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, dann folgt sofort $\lambda(B) = \lambda(B + c)$ für alle $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Dafür nutzen wir den Maßfortsetzungssatz, Teil Eindeutigkeit, d.h. Satz 1.21(a).

ν ist ein Maß, denn:

- $\nu(\emptyset) = \lambda(\emptyset + c) = \lambda(\emptyset) \overset{\lambda \text{ Maß}}{=} 0$.
- Für alle $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ gilt $\nu(B) = \lambda(B + c) \overset{\lambda \text{ Maß}}{\geq} 0$.
- Seien $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ paarweise disjunkt. Dann gilt $(B_n + c)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch paarweise disjunkt, und

$$\nu(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lambda(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} B_n + c) = \lambda(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}}(B_n + c)) \overset{\lambda \text{ Maß}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(B_n + c) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B_n).$$

Definiere $\mathcal{E} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt:

- $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,
- Für alle $E = (a,b] \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\nu(E) = \nu((a,b]) = \lambda((a+c, b+c]) = (b+c) - (a+c) = b - a = \lambda((a,b]) = \lambda(E).$$

- $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, und $E_n := (n, n+1] \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt

$$\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}, \qquad \lambda(E_n) = 1, \nu(E_n) = \lambda((n+c, n+1+c]) = 1 < \infty.$$

Maßfortsetzungssatz 1.21(a) ist nun anwendbar und liefert $\nu = \lambda$ auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Lösung 16.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch. Wähle zum Beispiel $\Omega = \{a,b,c,d\}$ und $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Dann ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil (alle nichttrivialen Schnitte von Elementen aus $\mathcal{E}$ ergeben $\emptyset$) und offensichtlich ist $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ (Nutze $\{d\} = (\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^c \in A(\mathcal{E})$ und vereinige dann die Mengen $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$, um jede beliebige zu erhalten). Definieren wir aber

$$\nu \equiv 0, \quad \mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = 0, \mu(\{d\}) = 1,$$

so gilt zwar $\mu \le \nu$ auf $\mathcal{E}$, aber nicht $\mu \le \nu$ auf $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$, denn $\mu(\{d\}) > \nu(\{d\})$.

(b)
- Es gilt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, denn: Für $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$ ist $\{k\} = \{k, k+1\} \setminus \{k-1, k\} \in A(\mathcal{E})$. Damit auch $\{1\} = \{1,2\} \setminus \{2\} \in A(\mathcal{E})$. Ist $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ beliebig, so folgt $A = \bigcup_{k\in A} \{k\} \in A(\mathcal{E})$. Wir haben gezeigt: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset A(\mathcal{E})$, d.h. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = A(\mathcal{E})$.
- Definiere $\mu_1(A) = |A|$ und

$$\mu_2(\{k\}) := \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade}, \\ 2, & k \text{ gerade}. \end{cases}$$

  (dadurch Maß eindeutig bestimmt wegen σ-Additivität und Abzählbarkeit von Ω). Offensichtlich ist $\mu_1 \ne \mu_2$.
- Für alle $k \in \mathbb{N}$: $\mu_1(\{k, k+1\}) = 2 = \mu_2(\{k, k+1\})$, d.h. für alle $E \in \mathcal{E} : \mu_1(E) = \mu_2(E)$.
- μ_1, μ_2 sind σ-endlich (mit Mengen aus $\mathcal{E}$): Wähle $E_k = \{k, k+1\}$, k ungerade. Dann sind E_k, k ungerade paarweise disjunkt und

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}, k \text{ ungerade}} E_k = \mathbb{N}, \qquad \mu_1(E_k) = \mu_2(E_k) = 2 < \infty.$$

- Grund (sowohl in 1.21(a) als auch 1.21(b)): $\mathcal{E}$ ist nicht $\cap$-stabil.

Lösung 17.

Lösung:

(a) Hinweis $\Rightarrow \mathcal{E} = \{[a,\infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Definiere $X := \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Wir zeigen $X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ ($\overset{\text{Vorlesung}}{\Rightarrow}$ X ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\overline{R}})$-messbar, d.h. messbare numerische Funktion).

Sei $E = [a,\infty] \in \mathcal{E}$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig. Zu zeigen: $X^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned} X^{-1}(E) &= \{\omega \in \Omega : \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) \in [a,\infty]\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) \geq a\} \\ &\overset{(*)}{=} \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \geq a\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq a\}}_{=X_n^{-1}([a,\infty])\in\mathcal{A}\ (X_n \text{ messb. num.})} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Achtung: Das Erzeugendensystem $\{(a,\infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ hätte man nicht für den Beweis nehmen können, da dann alle obigen '$\geq$' in den Mengen zu '$>$' werden und in $(*)$ dann keine Gleichheit, sondern nur noch '$\subset$' gilt.

(b) Wir zeigen wie in (a): $\tau_B^{-1}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{A}$ mit $\mathcal{E}_2 = \{[-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$.

Sei $E = [-\infty, a] \in \mathcal{E}_2$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig. Zu zeigen: $\tau_B^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tau_B^{-1}(E) &= \{\omega \in \Omega : \tau_B(\omega) \leq a\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N}, n \leq a : X_n(\omega) \in B\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}, n\leq a} \underbrace{\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in B\}}_{=X_n^{-1}(B)\in\mathcal{A}\ (X_n \text{ messb. num.})} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

(c) Wähle $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Sei $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Definiere die Funktionen X_r, $r \in \mathbb{R}$ durch

$$X_r := -\mathbb{I}_{\{r\}}, \quad r \in C, \qquad X_r := 0, \quad r \notin C.$$

Dann sind X_r, $r \in \mathbb{R}$ messbare numerische Funktionen, denn:

- für $r \notin C$: $X_r = \mathbb{I}_{\{r\}}$ ist Indikator einer Menge $\{r\} \in \mathcal{A}$ (daher $X_r^{-1}(\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}) = \{\emptyset, \{r\}, \Omega\backslash\{r\}, \Omega\} \subset \mathcal{A}$),
- für $r \notin C$: $X_r = 0$ ist konstant (daher $X_r^{-1}(\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}) = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{A}$).

Aber

$$\inf_{r\in R} X_r = -\mathbb{I}_C,$$

denn für $\omega \in C$: $(\inf_{r\in R} X_r)(\omega) = \inf_{r\in R}(X_r(\omega)) \overset{r=\omega\in C}{=} -1$, und für $\omega \notin C$: $(\inf_{r\in R} X_r)(\omega) = \inf_{r\in R}(X_r(\omega)) = 0$.

Es gilt also $(\inf_{r\in R} X_r)^{-1}(\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}) = \{\emptyset, C, \Omega\backslash C, \Omega\} \not\subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, da $C \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

(d) Da $r \mapsto X_r(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ stetig ist, gilt:

$$\inf_{r\in\mathbb{R}} X_r = \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q.$$

Beweis: '$\leq$': Klar, linkes Infimum wird über mehr Elemente gebildet.
'$\geq$': Wir zeigen: Für alle $r \in \mathbb{R}$ ist $X_r \geq \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q$ (dann folgt $\inf_{r\in\mathbb{R}} X_r \geq \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q$).
Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ mit $q_n \to r$. Es folgt $X_r = X_{\lim_{n\to\infty} q_n} \overset{r\mapsto X_r(\cdot) \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} X_{q_n} \geq \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q$.

Nun geht der Beweis wie in (a), da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist: Definiere $X := \inf_{r\in\mathbb{R}} X_r = \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q$. Wir zeigen $X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

Sei $E = [a, \infty] \in \mathcal{E}$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig. Zu zeigen: $X^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned} X^{-1}(E) &= \{\omega \in \Omega : \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q(\omega) \in [a,\infty]\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \inf_{q\in\mathbb{Q}} X_q(\omega) \geq a\} \\ &\overset{(*)}{=} \{\omega \in \Omega : \forall q \in \mathbb{Q} : X_q(\omega) \geq a\} \\ &= \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{\{\omega \in \Omega : X_q(\omega) \geq a\}}_{=X_q^{-1}([a,\infty])\in\mathcal{A}\ (X_q \text{ messb. num.})} \quad \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Lösung 18.
Lösung:

(a) "$\Rightarrow$": Sei $i \in \mathbb{N}$. $B \in \mathcal{B}$ beliebig. Zu zeigen: $(X|_{A_i})^{-1}(B) \in \mathcal{A}|_{A_i} = \mathcal{A} \cap A_i$.

Es gilt
$$(X|_{A_i})^{-1}(B) = \underbrace{X^{-1}(B)}_{\in\mathcal{A}} \cap A_i \in \mathcal{A}|_{A_i} = \{A \cap A_i : A \in \mathcal{A}\}.$$

"$\Leftarrow$": Sei $B \in \mathcal{B}$. Zu zeigen: $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Es gilt
$$X^{-1}(B) = X^{-1}(B) \cap \sum_{i\in\mathbb{N}} A_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (X^{-1}(B) \cap A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{(X|_{A_i})^{-1}(B)}_{\in\mathcal{A}|_{A_i}\subset\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

(b) Wähle $\mathcal{E} = \{U \subset \Omega : U \text{ offen in } (\Omega, d)\}$ als Erzeugendensystem von $\mathcal{B}_\Omega$. Definiere
$$f : A \to \Omega, \quad f(\omega) = \omega$$
als natürliche Inklusion von A in Ω. Dann gilt
$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{E}) &= \{f^{-1}(B) : B \text{ offen in } (\Omega, d)\} \\ &= \{B \cap A : B \text{ offen in } (\Omega, d)\} = \{B \subset A : B \text{ offen in } (A, d_{A\times A})\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Weiter ist
$$f^{-1}(\mathcal{B}_\Omega) = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}_\Omega\} = \mathcal{B}_\Omega \cap A. \tag{3}$$

Damit:
$$\mathcal{B}_\Omega \cap A \overset{(3)}{=} f^{-1}(\mathcal{B}_\Omega) = f^{-1}(A(\mathcal{E})) \overset{\text{Blatt 1, A4(a)}}{=} A(f^{-1}(\mathcal{E})) \overset{(2)}{=} A(\{B \subset A : B \text{ offen in } (A, d_{A\times A})\}) = \mathcal{B}_A.$$

(c) Sei $\mathcal{E} = \{U \subset \mathcal{X} : \mathcal{X} \text{ offen in } \mathcal{X}\} \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{X}} = A(\mathcal{E})$.

Wir zeigen: $(X|_A)^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}_A \overset{(b)}{=} \mathcal{B}_\Omega|_A$ (dann folgt, dass $X|_A$ ($\mathcal{B}_\Omega|_A$-$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$-messbar).

Sei $U \in \mathcal{E}$ beliebig. $\Rightarrow U$ offen $\overset{X|_A \text{ stetig}}{\Rightarrow} (X|_A)^{-1}(U)$ ist offen in $A \Rightarrow (X|_A)^{-1}(U) \in \mathcal{B}_A$.

Lösung 19.

Lösung:

(a) (i) Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \begin{cases} \sin(x^{-1}), & x \notin [-\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{n\pi}] \\ 0, & x \in [-\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{n\pi}] \end{cases}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: f_n stetig $\overset{\text{VL 1.35 oder A10(c)}}{\Rightarrow}$ f_n ist $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar. (*)
Weiter gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \text{d.h. punktweise} f_n \to f.$$

$\overset{\text{VL 1.41(ii)}}{\Rightarrow}$ f ist $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar als Limes $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbarer Funktionen (**).

Achtung: Eigentlich muss der Schluss (**) etwas genauer begründet werden: Aus (*) folgt: f_n sind auch messbare numerische Funktionen, vgl. VL 1.40. VL 1.41(ii) liefert nun: f ist messbar numerisch (d.h. $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-messbar). Da f aber nur Bildbereich $\mathbb{R}$ hat, ist f auch $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.

(ii) Im Kontext von Aufgabe 10 wählen wir die disjunkte Zerlegung $A_1 := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $A_2 := \{0\}$ von $\mathbb{R}$, d.h. $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$

$$f|_{A_1} : A_1 \to \mathbb{R}, f|_{A_1}(x) = \sin(x^{-1})$$

ist stetig $\overset{\text{A10(c)}}{\Rightarrow}$ $f|_{A_1}$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}|_{A_1}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.
$\Rightarrow$

$$f|_{A_2} : A_2 \to \mathbb{R}, f|_{A_2}(x) = 0$$

ist ebenfalls stetig als konstante Funktion $\overset{\text{A10(c)}}{\Rightarrow}$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}|_{A_1}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar. (Natürlich ist $f|_{A_2}$ als konstante Abbildung trivialerweise sowieso messbar).
$\overset{\text{A10(a)}}{\Rightarrow}$ f $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \mathbb{I}_{\{\frac{1}{k}\}}(x).$$

$\Rightarrow g_n$ primitive Funktion $\Rightarrow g_n$ messbar numerisch
$\overset{\text{VL 1.41(ii)}}{\Rightarrow}$ $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ ist $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar als Limes $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbarer Funktionen.
Bildbereich von g ist $\mathbb{R} \Rightarrow g$ ist $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.

(c) Da $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(x+\frac{1}{n}) - h(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Die Funktionen

$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) := \frac{h(x+\frac{1}{n}) - h(x)}{\frac{1}{n}}$$

sind für festes $n \in \mathbb{N}$ stetig, da h differenzierbar ist (also auch stetig).
$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow} h_n$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar, damit messbar numerisch.
$\overset{\text{VL 1.41(ii)}}{\Rightarrow} h = \lim_{n\to\infty} h_n$ ist messbar numerisch
Bildbereich von h ist $\mathbb{R} \Rightarrow h$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.

Lösung 20.

Lösung:

(a) Es sind $f^+, f^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\} = \max\{1-|x|, 0\} = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} = (1-|x|)\mathbb{I}_{\{|x|\le 1\}}, \\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\} = \max\{|x|-1, 0\} = \begin{cases} 0, & |x| \le 1, \\ |x|-1, & |x| > 1 \end{cases} = (|x|-1)\mathbb{I}_{\{|x|>1\}}. \end{aligned}$$

(b) Die Formel aus dem Beweis von Satz 1.44(i) für die primitive Funktion $f_n^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ lautet:

$$f_n^+(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{x: \frac{j-1}{2^n} \le f^+(x) < \frac{j}{2^n}\}}(x) + n \cdot \mathbb{I}_{\{x: f^+(x) \ge n\}}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ verschwindet der letzte Summand. Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \frac{j-1}{2^n} \le f^+(x) = (1-|x|)\mathbb{I}_{\{|x|\le 1\}} < \frac{j}{2^n} \\ \iff & \frac{j-1}{2^n} \le 1-|x| < \frac{j}{2^n}, \qquad 1 \le j \le 2^n + 1 \\ \iff & 1 - \frac{j-1}{2^n} \ge |x| > 1 - \frac{j}{2^n}, \qquad 1 \le j \le 2^n + 1 \end{aligned}$$

(j muss formal bis $2^n + 1$ und nicht bis 2^n gehen, da $f^+(0) = 1$ sonst nicht enthalten ist).

Es folgt:

$$f_n^+(x) \;=\; \sum_{j=1}^{2^n+1} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{I}_{(1-\frac{j}{2^n}, 1-\frac{j-1}{2^n}] \cup [-1+\frac{j-1}{2^n}, -1+\frac{j}{2^n})}(x).$$

(c) Definition Maßintegral, (b) $\Rightarrow$

$$\int f_n^+ d\lambda = \sum_{j=1}^{2^n+1} \frac{j-1}{2^n} \underbrace{\lambda\Big((1-\frac{j}{2^n}, 1-\frac{j-1}{2^n}] \cup [-1+\frac{j-1}{2^n}, -1+\frac{j}{2^n})\Big)}_{=\begin{cases}\frac{2}{2^n}, & j=1,...,2^n,\\ 0, & j=2^n+1\end{cases}}$$

$$= \frac{2}{2^{2n}} \sum_{j=1}^{2^n} (j-1) \overset{\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}}{=} \frac{2}{2^{2n}} \cdot \frac{(2^n-1)2^n}{2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

(d) Definition Maßintegral, (c) $\Rightarrow$

$$\int f^+ d\lambda := \lim_{n\to\infty} \int f_n^+ d\lambda = \lim_{n\to\infty} \Big[1 - 2^{-n}\Big] = 1.$$

Es gilt $\int f^- d\lambda = \infty$ (folgt sofort aus $f^- \geq \mathbb{I}_{[2,\infty)}$).
$\Rightarrow \int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda = 1 - \infty = -\infty$.

Lösung 21.

Lösung:

(a) Hinweis $\Rightarrow \mathcal{E} = \{[-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Definiere $X := \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Wir zeigen $X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ ($\overset{\text{Vorlesung}}{\Rightarrow}$ X ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-messbar, d.h. messbare numerische Funktion).

Sei $E = [-\infty, a] \in \mathcal{E}$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig. Zu zeigen: $X^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned} X^{-1}(E) &= \{\omega \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) \in [-\infty, a]\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) \leq a\} \\ &\overset{(*)}{=} \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \leq a\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \leq a\}}_{=X_n^{-1}([-\infty,a])\in\mathcal{A}\ (X_n \text{ messb. num.})} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Achtung: Das Erzeugendensystem $\{[-\infty, a) : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ hätte man nicht für den Beweis nehmen können, da dann alle obigen '$\leq$' in den Mengen zu '$<$' werden und in $(*)$ dann keine Gleichheit, sondern nur noch '$\subset$' gilt.

(b) Wir zeigen wie in (a): $\tau^{-1}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{A}$ mit $\mathcal{E}_2 = \{[a, \infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$.

Sei $E = [a, \infty] \in \mathcal{E}_2$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig. Zu zeigen: $\tau^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(E) &= \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \geq a\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N}, n \geq a : X_n(\omega) > 0\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}, n\geq a} \underbrace{\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) > 0\}}_{=X_n^{-1}((0,\infty])\in\mathcal{A}\ (X_n \text{ messb. num.})} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

(c) Wähle $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Sei $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Definiere X durch

$$X(\omega) := \begin{cases} |\omega|, & \omega \in C, \\ -|\omega|, & \omega \notin C. \end{cases}$$

(alle positiven Funktionswerte von X kommen durch Argumente aus C, alle negativen aus C^c).

Dann ist für alle $c \in \overline{\mathbb{R}}$: $X^{-1}(\{c\}) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, denn $X^{-1}(\{c\}) \subset \{c, -c\}$ ist höchstens zweielementig (detaillierte Berechnung von $X^{-1}(\{c\})$ ist weder notwendig noch hilfreich zum Verständnis) und wir wissen, dass endliche Mengen in $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ enthalten sind.

Aber X ist keine messbare numerische Funktion, denn (falls oBdA. $0 \notin C$, sonst nehme $X^{-1}([0, \infty])$): $X^{-1}((0, \infty]) = C \notin \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

Lösung 22.

Lösung:

(a) VL zwischen 1.38/1.39 $\Rightarrow \mathcal{E} = \{[-\infty, a_1] \times [-\infty, a_2] : a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^2}$.

Wir zeigen: $Z^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. ($\overset{\text{VL 1.33}}{\Rightarrow}$ Z ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^2})$-messbar, d.h. 2-dim. messbar numerisch).

Sei $E = [-\infty, a_1] \times [-\infty, a_2] \in \mathcal{E}$.
$\Rightarrow$

$$Z^{-1}(E) = (X, Y)^{-1}([-\infty, a_1] \times [-\infty, a_2]) \overset{(*)}{=} \underbrace{X^{-1}([-\infty, a_1])}_{\in \mathcal{A}\ (X \text{ messb. num.})} \cap \underbrace{Y^{-1}([-\infty, a_2])}_{\in \mathcal{A}\ (Y \text{ messb. num.})} \in \mathcal{A}.$$

(Nicht detailliert vorrechnen) (*) gilt allgemein: $(X, Y)^{-1}(A_1 \times A_2) = X^{-1}(A_1) \cap Y^{-1}(A_2)$, *denn:*

- $\omega \in (X, Y)^{-1}(A_1 \times A_2) \iff (X(\omega), Y(\omega)) = (X, Y)(\omega) \in A_1 \times A_2 \iff X(\omega) \in A_1$, $Y(\omega) \in A_2 \iff \omega \in X^{-1}(A_1)$ *und* $\omega \in Y^{-1}(A_2) \iff \omega \in X^{-1}(A_1) \cap Y^{-1}(A_2)$.

(b) VL zwischen 1.38/1.39 $\Rightarrow \mathcal{E} = \{[-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Wir zeigen: $Z^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. ($\overset{\text{VL 1.33}}{\Rightarrow}$ Z ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-messbar, d.h. messbar numerisch).

Sei $E = [-\infty, a] \in \mathcal{E}$.
Es folgt:

$$Z^{-1}(E) \overset{(*)}{=} (\underbrace{X^{-1}(E)}_{\in \mathcal{A}\ (X \text{ messb. num.})} \cap A) \cup (\underbrace{Y^{-1}(E)}_{\in \mathcal{A}\ (Y \text{ messb. num.})} \cap A^c) \in \mathcal{A}.$$

(Nicht detailliert vorrechnen) (*) gilt allgemein: $\omega \in Z^{-1}(E) \iff Z(\omega) \in E \iff$ *(*$\omega \in A$ *und* $Z(\omega) \in E$*) oder (*$\omega \in A^c$ *und* $Z(\omega) \in E$*)* $\iff$ *(*$\omega \in A$ *und* $X(\omega) \in E$*) oder (*$\omega \in A$ *und* $Y(\omega) \in E$*)* $\iff \omega \in (X^{-1}(E) \cap A) \cup (Y^{-1}(E) \cap A^c)$.

(c) Wir nutzen (b) mit $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Mit $X(\omega) = \omega$, $Y(\omega) = -\omega$ und $A = (0, \infty) \in \mathcal{A}$ gilt $f = Z$ (Z aus (b)).

Es bleibt zu zeigen, dass X, Y messbar numerisch sind.
Beweis: $X, Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig $\overset{\text{VL}}{\Rightarrow}$ X, Y $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar $\Rightarrow$ X, Y messbar numerisch.

Achtung 1: Im Grunde hätte man auch sofort mit der Stetigkeit der Abbildung argumentieren können, in dem Sinne war die Aufgabe schlecht gestellt. Wäre diese aber nicht stetig gewesen (z.B. $-x-1$ für $x \leq 0$), hätte obiges Argument genauso funktioniert; das Stetigkeitsargument aber nicht mehr.

Achtung 2: Es gibt hier einen Unterschied zu A10(a),(c): Aufgrund der einfachen Struktur von f konnten wir X, Y ablesen und jeweils getrennt auf ganz $\Omega = \mathbb{R}$ (stetig) definieren, obwohl z.B. X gemäß der Definition von f eigentlich nur auf $(0, \infty)$ bekannt ist. Dies ist nicht immer möglich. A10(a),(c) liefert eine Möglichkeit, wie man Messbarkeit ohne solch eine globale Fortsetzung für X, Y zeigen kann.

Lösung 23.

Lösung:

(a) (i) Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \begin{cases} x^{-1}, & |x| > \frac{1}{n} \\ n^2 x, & |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: f_n stetig $\overset{\text{VL 1.35 oder A10(c)}}{\Rightarrow}$ f_n ist $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar. (*)
Weiter gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \qquad \text{d.h. punktweise} f_n \to f.$$

$\overset{\text{VL 1.41(ii)}}{\Rightarrow}$ f ist $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar als Limes $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbarer Funktionen (**).

Achtung: Eigentlich muss der Schluss (**) etwas genauer begründet werden: Aus (*) folgt: f_n sind auch messbare numerische Funktionen, vgl. VL 1.40. VL 1.41(ii) liefert nun: f ist messbar numerisch (d.h. $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-messbar). Da f aber nur Bildbereich $\mathbb{R}$ hat, ist f auch $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.

(ii) Im Kontext von Aufgabe 10 wählen wir die disjunkte Zerlegung $A_1 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A_2 := \{0\}$ von $\mathbb{R}$, d.h. $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$

$$f|_{A_1} : A_1 \to \mathbb{R}, f|_{A_1}(x) = \frac{1}{x}$$

ist stetig $\overset{\text{A10(c)}}{\Rightarrow}$ $f|_{A_1}$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}|_{A_1}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.
$\Rightarrow$

$$f|_{A_2} : A_2 \to \mathbb{R}, f|_{A_2}(x) = 0$$

ist ebenfalls stetig als konstante Funktion $\overset{\text{A10(c)}}{\Rightarrow}$ $(\mathcal{B}_\mathbb{R}|_{A_1}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar. (Natürlich ist $f|_{A_2}$ als konstante Abbildung trivialerweise sowieso messbar).
$\overset{\text{A10(a)}}{\Rightarrow}$ f $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.

(b) Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} q_n^2 \mathbb{I}_{\{q_n\}}(x).$$

$\Rightarrow g_n$ primitive Funktion $\Rightarrow g_n$ messbar numerisch
$\overset{\text{VL 1.41(ii)}}{\Rightarrow}$ $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ ist $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbar als Limes $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbarer Funktionen.
Bildbereich von g ist $\mathbb{R} \Rightarrow g$ ist $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbar.

(c) Da g für alle $s \in \mathbb{R}$ in x Riemann-integrierbar ist, gilt

$$h(s) = \int_0^1 g(s,x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} g\Big(s, \frac{t}{n}\Big) \cdot \Big(\frac{t}{n} - \frac{t-1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} g\Big(s, \frac{t}{n}\Big)$$

(das Riemann-Integral ist Grenzwert von Riemann-Summen mit der Partition $[\frac{t-1}{n}, \frac{t}{n})$, $t = 1, ..., n$ des Intervalls $[0,1)$). Definiere nun

$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(s) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} g\Big(s, \frac{t}{n}\Big).$$

Die h_n sind stetig, da $g(s,x)$ stetig in s ist für alle $x \in \mathbb{R}$ $\overset{\text{VL 1.35}}{\Rightarrow}$ h_n $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbar und damit messbar numerisch.
$h = \lim_{n\to\infty} h_n$ $\overset{\text{VL 1.41(ii)}}{\Rightarrow}$ h ist messbar numerisch.
Bildbereich von h ist $\mathbb{R} \Rightarrow h$ ist $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-messbar.

Lösung 24.

Lösung:

(a) Es sind $f^+, f^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} 0, & x \geq 1, \\ \max\{x^{1/2}, 0\}, & x \in [0,1), \\ \max\{x, 0\}, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^{1/2}, & x \in [0,1), \\ 0, & x \in [0,1)^c \end{cases} = x^{1/2}\mathbb{I}_{[0,1)}(x), \\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} -0, & x \geq 1, \\ \max\{-x^{1/2}, 0\}, & x \in [0,1), \\ \max\{-x, 0\}, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} = -x\mathbb{I}_{(-\infty,0]}(x) \end{aligned}$$

.

(b) Die Formel aus dem Beweis von Satz 1.44(i) für die primitive Funktion $f_n^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ lautet:

$$f_n^+(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{x: \frac{j-1}{2^n} \leq f^+(x) < \frac{j}{2^n}\}}(x) + n \cdot \mathbb{I}_{\{x: f^+(x) \geq n\}}. \quad (*)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{j-1}{2^n} \leq f^+(x) = x^{1/2}\mathbb{I}_{[0,1)}(x) < \frac{j}{2^n} \\ \iff \quad & \frac{j-1}{2^n} \leq x^{1/2} < \frac{j}{2^n}, \qquad 1 \leq j \leq 2^n \\ \iff \quad & (\frac{j-1}{2^n})^2 \leq x < (\frac{j}{2^n})^2, \qquad 1 \leq j \leq 2^n \end{aligned}$$

Damit folgt für $n \in \mathbb{N}$ (der letzte Summand in (*) verschwindet):

$$f_n^+(x) \quad = \quad \sum_{j=1}^{2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{I}_{[(\frac{j-1}{2^n})^2,(\frac{j}{2^n})^2)}(x).$$

(c) Definition Maßintegral, (b) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int f_n^+ d\lambda \quad &= \quad \sum_{j=1}^{2^n} \frac{j-1}{2^n} \underbrace{\lambda\big([(\frac{j-1}{2^n})^2,(\frac{j}{2^n})^2)\big)}_{=\frac{1}{2^{2n}}(j^2-(j-1)^2)} \\ &= \quad \frac{1}{2^{3n}} \sum_{j=1}^{2^n} (j-1)\cdot(j^2-(j-1)^2) \\ &= \quad \frac{2}{2^{3n}} \sum_{j=1}^{2^n} j^2 + \frac{1}{2^{3n}} \sum_{j=1}^{2^n}(-3j+1) \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} \quad \frac{2}{3} + \text{Terme der Form } \frac{1}{2^n} \cdot \text{beschraenkt.}\end{aligned}$$

(d) Definition Maßintegral, (c) $\Rightarrow$

$$\int f^+ d\lambda := \lim_{n\to\infty} \int f_n^+ d\lambda = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{3} + \text{Terme der Form } \frac{1}{2^n} \cdot \text{beschraenkt}\right] = \frac{2}{3}.$$

Ähnliches Vorgehen für f^- liefert $\int f^- d\lambda = \infty$.
$\Rightarrow \int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda = \frac{2}{3} - \infty = -\infty$.

Lösung 25.

Lösung:

(a) Wir nutzen maßtheoretische Induktion, d.h. wir zeigen die Aussage nacheinander für immer allgemeinere Funktionen h.

(i) Sei $h = \mathbb{I}_A$ mit $A \in \mathcal{B}$. Dann ist

$$\int (h\circ X)\,\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{I}_A \circ X\,\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{I}_{X^{-1}(A)}\,\mathrm{d}\mu = \mu(X^{-1}(A)) = \mu^X(A) = \int \mathbb{I}_A\,\mathrm{d}\mu^X = \int h\,\mathrm{d}\mu^X.$$

(ii) Sei $h = \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{I}_{A_i}$ eine nichtnegative primitive Funktion, d.h. $x_i \in [0,\infty], A_i \in \mathcal{B}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int (h\circ X)\,\mathrm{d}\mu \quad &= \quad \int \left(\sum_{i=1}^m x_i \mathbb{I}_{A_i}\right) \circ X\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Lin.}}{=} \sum_{i=1}^m x_i \cdot \int \mathbb{I}_{A_i} \circ X\,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \quad \sum_{i=1}^m x_i \cdot \int \mathbb{I}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu^X \overset{\text{Lin.}}{=} \int \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{I}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu^X = \int h\,\mathrm{d}\mu^X\end{aligned}$$

(iii) Sei $h : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ nichtnegativ messbar numerisch. Dann gibt primitive Funktionen $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $0 \le h_i \uparrow h$.
$\Rightarrow$ Jedes h_i hat die Form

$$h_i = \sum_{j=1}^{m(i)} x_{ij} \cdot \mathbb{I}_{A_{ij}}, \qquad x_{ij} \in [0,\infty], \quad A_{ij} \in \mathcal{B}.$$

und somit ist auch

$$h_i \circ X = \sum_{j=1}^{m(i)} x_{ij} \cdot \mathbb{I}_{X^{-1}(A_{ij})}$$

eine primitive Funktion mit $B_{ij} := X^{-1}(A_{ij}) \in \mathcal{A}$.

$0 \leq h_i \uparrow h$ (punktweise) $\Rightarrow 0 \leq h_i \circ X \uparrow h \circ X$ (punktweise).
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int (h \circ X)\ \mathrm{d}\mu &\overset{\text{Def. Maßint. oder mon. Konv.}}{=} \lim_{i\to\infty} \int (h_i \circ X)\ \mathrm{d}\mu \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{i\to\infty} \int h_i\ \mathrm{d}\mu^X \overset{\text{Def. Maßint.}}{=} \int h\ \mathrm{d}\mu^X\end{aligned}$$

(iv) Sei $h : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar numerisch. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int (h \circ X)^+\ \mathrm{d}\mu = \int (h^+ \circ X)\ \mathrm{d}\mu &\overset{\text{(iii)}}{=} \int h^+\ \mathrm{d}\mu^X, \\ \int (h \circ X)^-\ \mathrm{d}\mu = \int (h^- \circ X)\ \mathrm{d}\mu &\overset{\text{(iii)}}{=} \int h^-\ \mathrm{d}\mu^X.\end{aligned}$$

Aufgrund der obigen beiden Gleichungen existiert $\int (h \circ X)\ \mathrm{d}\mu$ genau dann, wenn $\int h\ \mathrm{d}\mu^X$ existiert, und es gilt im Falle der Existenz:

$$\begin{aligned}\int (h \circ X)\ \mathrm{d}\mu &\overset{\text{Def. Maßint.}}{=} \int (h \circ X)^+\ \mathrm{d}\mu - \int (h \circ X)^-\ \mathrm{d}\mu \\ &= \int h^+\ \mathrm{d}\mu^X - \int h^-\ \mathrm{d}\mu^X \overset{\text{Def. Maßint.}}{=} \int h\ \mathrm{d}\mu^X.\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) > \frac{1}{n}\}.$$

$\Rightarrow$

$$0 \overset{\text{Vorauss.}}{<} \mu(\{X > 0\}) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X > \frac{1}{n}\}\Big) \overset{\text{Stetigkeit Maß von unten}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(\{X > \frac{1}{n}\}).$$

$\Rightarrow$ Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\{X > \frac{1}{N}\}) > 0$.

$\Rightarrow$

$$\int_{\{X>0\}} X\ \mathrm{d}\mu \geq \int_{\{X>\frac{1}{N}\}} X\ \mathrm{d}\mu \geq \int_{\{X>\frac{1}{N}\}} \frac{1}{N}\ \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{N}\mu(\{X > \frac{1}{N}\}) > 0.$$

Lösung 26.

Lösung: Sei $x_0 \in U$ fest gewählt und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge mit $h_n \to 0$, und

$$g_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g_n(\omega) := \frac{f(x_0 + h_n, \omega) - f(x_0, \omega)}{h_n}.$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \cdot)$ μ-fast überall auf Ω nach (2). Sei nun $N \in \mathcal{A}$ die Nullmenge, auf der $\frac{\partial}{\partial x} f(\cdot, \omega)$ nicht existiert.
Sei nun $\omega \in \Omega \backslash N$ fest gewählt.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\Rightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $\xi_{n,\omega} \in U$ so dass

$$g_n(\omega) = \frac{f(x_0 + h_n, \omega) - f(x_0, \omega)}{h_n} = \frac{\partial}{\partial x} f(\xi_{n,\omega}, \omega).$$

(2) $\Rightarrow$

$$|g_n(\omega)| = \left| \frac{\partial}{\partial x} f(\xi_{n,\omega}, \omega) \right| \leq g(\omega).$$

$\Rightarrow$ $|g_n| \leq g$ μ-fast überall. Damit sind die Voraussetzungen des Satz von der majorisierten Konvergenz erfüllt und es folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\int f(x_0 + h_n, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega) - \int f(x_0, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)}{h_n} &\overset{\text{Lin.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega).\end{aligned}$$

Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ war beliebig gewählt $\Rightarrow$ $x \mapsto \int f(x, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ differenzierbar in x_0 mit

$$\frac{\partial}{\partial x} \int f(x_0, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Lösung 27.

Lösung:

(a) (i) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin(x)} \mathbb{I}_{[0,\pi]}(x)$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| \leq \mathbb{I}_{[0,\pi]}(x) =: g(x),$$

und g ist offensichtlich λ-integrierbar. Weiter gilt $f_n(x) \to 1$ für alle $x \in (0, \pi)$, d.h. $\lim_{n\to\infty} f_n = \mathbb{I}_{(0,\pi)}$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)} \, \mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\lambda = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda = \int \mathbb{I}_{(0,\pi)} \, \mathrm{d}\lambda = \pi.$$

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n \to 1$.

$\Rightarrow$ OBdA. nehmen wir an $a_n \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (*).

Definiere $g_n := \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k^{a_n}} \mathbb{I}_{\{k\}}$ und μ_Z sei das Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. $\Rightarrow$

$$\lim_{a\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k^a} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k^{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu_Z.$$

$(*) \Rightarrow 0 \leq g_n \leq h := \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{\sqrt{k}} \mathbb{I}_{\{k\}}$ und $\int h \, \mathrm{d}\mu_Z = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{\sqrt{k}} < \infty$ (Hinweis), und $\lim_{n\to\infty} g_n = g := \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \mathbb{I}_{\{k\}}$.

$\Rightarrow$

$$\lim_{a\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k^a} = \int g_n \, \mathrm{d}\mu_Z \overset{\text{dom. Konv.}}{=} \int \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu_Z = \int g \, \mathrm{d}\mu_Z = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = 1.$$

(b) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) \to \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Das bedeutet $f_n \to f$ λ-fast überall mit $f \equiv 0$, denn $\lambda(\{0\}) = 0$. Damit ist f als konstante Funktion $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar.
Es gilt aber (Riemann = Lebesgue, Satz 1.52):

$$\int f_n \, d\lambda = \int_0^1 n \cdot e^{-nx} \, dx = \Big[- e^{-nx} \Big]_0^1 = 1 - e^{-n},$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1 \neq 0 = \int 0 \, d\lambda = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda.$$

Der Satz von der dominierten Konvergenz ist nicht anwendbar, da $f_n \geq 0$ zwar nach unten durch eine integrierbare Funktion beschränkt ist, aber nicht nach oben durch eine λ-integrierbare Funktion beschränkt werden kann.

(c) Hier ist

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

und

$$\int f_n \, d\lambda = 2 + (-1)^n,$$

womit folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1 \geq 0 = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda, \qquad \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 3 > 0 = \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\lambda.$$

Das bedeutet, die erste Ungleichung des Lemmas von Fatou gilt, die zweite Ungleichung ist verletzt. Die erste Ungleichung gilt, da $f_n \geq 0$ nach unten durch eine λ-integrierbare Funktion beschränkt ist. Die zweite Ungleichung gilt nicht, da f_n nicht nach oben durch eine λ-integrierbare Funktion beschränkt werden kann.

Lösung 28.

Lösung:

(a) (i) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ und

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \mathbb{I}_{[2k,2k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_{[2k+1,2k+2)}(x)$$

Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \int f_n \, d\lambda = n - (n-1) = 1,$$

und die f_n sind integrierbar ($\int |f_n| \, d\mu = n + (n-1) = 2n - 1 < \infty$). Weiter gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_{[2k,2k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_{[2k+1,2k+2)}(x).$$

f ist jedoch nicht λ-integrierbar, denn $\int f^+ \, d\lambda = \sum_{k=0}^\infty 1 = \infty, \int f^- \, d\lambda = \sum_{k=0}^\infty 1 = \infty$.

(ii) Seien alle $f_n \geq 0$. $\Rightarrow$

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} 1 = 1.$$

$\overset{f \geq 0}{\Rightarrow}$ f μ-integrierbar (da $\int |f| \, \mathrm{d}\mu \overset{f\geq 0}{=} \int f \, \mathrm{d}\mu = 1 < \infty$).

(b) Die Aussage ist wahr. Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir $B_N := \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \leq N\}$. Nun gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu\right| &\leq \int_{A_n} |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_n \cap B_N} |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_{A_n \cap B_N^c} |f| \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_{A_n \cap B_N} |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_{B_N^c} |f| \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq N \cdot \mu(A_n) + \int |f| \cdot \mathbb{I}_{B_N^c} \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Es folgt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq 0 + \int |f| \cdot \mathbb{I}_{B_N^c} \, \mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

Es gilt:

- $\lim_{N\to\infty} |f| \cdot \mathbb{I}_{B_N^c} = \lim_{N\to\infty} |f| \cdot \mathbb{I}_{\{|f|>N\}} = |f| \cdot \mathbb{I}_{\{|f|=\infty\}} = 0.$
- $0 \leq |f| \cdot \mathbb{I}_{B_N^c} \leq |f|$

$\Rightarrow$

$$\lim_{N\to\infty} \int |f| \cdot \mathbb{I}_{B_N^c} \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{dom. Konv.}}{=} \int \lim_{N\to\infty} |f| \cdot \mathbb{I}_{B_N^c} \, \mathrm{d}\mu = \int 0 \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

(wie bei P16(a)). *Alternativ kann mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, allerdings hier in der Form 'monoton fallend', argumentiert werden).*

Anwendung von $\lim_{N\to\infty}$ auf (4) liefert:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq 0 + 0 = 0.$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Lösung 29.

Lösung:

(a) Anwendung maßtheoretische Induktion:

(i) Sei $f = \mathbb{I}_A$ mit $A \in \mathcal{A}$. Dann folgt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \mu(A) \overset{\text{Def. } \mu}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \mu_n(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \int f \, \mathrm{d}\mu_n.$$

(ii) Sei $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mathbb{I}_{A_k}$ mit $\alpha_k \in [0,\infty]$, $A_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, ..., m)$ eine nichtnegative primitive Funktion.

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\mu &\overset{\text{Lin. Maßint.}}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \int \mathbb{I}_{A_k} \,\mathrm{d}\mu \overset{(i)}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot \int \mathbb{I}_{A_k} \,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot \sum_{k=1}^m \alpha_k \int \mathbb{I}_{A_k} \,\mathrm{d}\mu_n \overset{\text{Lin.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot \int f \,\mathrm{d}\mu_n.\end{aligned}$$

(iii) Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige messbare numerische Funktion mit $f \geq 0$. Sei $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge primitiver Funktionen mit $f_i \uparrow f$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu \overset{(ii)}{=} \lim_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \int f_i \,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \lim_{i\to\infty} \int g_i \,\mathrm{d}\mu_Z,\end{aligned}$$

wobei μ_Z Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ und

$$g_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \int f_i \,\mathrm{d}\mu_n \cdot \mathbb{I}_{\{n\}}.$$

(Das ist ein Trick: Wir fassen die unendliche Summe als Maßintegral über das Zählmaß auf, um Sätze für Maßintegrale, hier den Satz von der monotonen Konvergenz, benutzen zu können!)
$f_i \geq 0$, $f_i \uparrow f \Rightarrow g_i \geq 0$, $g_i \uparrow$. $\Rightarrow$ Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} g_i(k) \overset{(*)}{=} \lim_{i\to\infty} c_k \int f_i \,\mathrm{d}\mu_k \overset{\text{mon. Konv., } 0\leq f_i\uparrow f}{=} c_k \int f \,\mathrm{d}\mu_k =: g(k).$$

Daher $g_i \uparrow g$. (*Achtung: Schritt (*) ist einfach, da nur punktweise Konvergenz nachgeprüft werden muss. Das bedeutet, man muss nur ein festes $k \in \mathbb{N}$ in g_i einsetzen. Dadurch verschwindet die unendliche Summe $\sum_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. hier müssen keine Grenzwerte vertauscht werden. Die unendliche Summe $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ verschwindet, da sie wegen der Indikatoren $\mathbb{I}_{\{n\}}$ nur eine unendliche Fallunterscheidung darstellt*).

$\Rightarrow$

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int g_i \,\mathrm{d}\mu_Z \overset{\text{mon. Konv., } 0\leq g_i\uparrow g}{=} \int \lim_{i\to\infty} g_i \,\mathrm{d}\mu_Z = \int g \,\mathrm{d}\mu_Z = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \int f \,\mathrm{d}\mu_k$$

(iv) Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige messbare numerische Funktion. Es folgt

$$\begin{aligned}\int f^+ \,\mathrm{d}\mu &\overset{(iii)}{=} \sum_{n=1}^\infty c_n \cdot \int f^+ \,\mathrm{d}\mu_n, \\ \int f^- \,\mathrm{d}\mu &\overset{(iii)}{=} \sum_{n=1}^\infty c_n \cdot \int f^- \,\mathrm{d}\mu_n.\end{aligned}$$

Es folgt (falls alle Ausdrücke existieren):

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty c_n \cdot \Big(\int f^+ \,\mathrm{d}\mu_n - \int f^- \,\mathrm{d}\mu_n \Big) = \sum_{n=1}^\infty c_n \cdot \int f \,\mathrm{d}\mu_n.$$

(b) Sei $A_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > \frac{1}{n}\}$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 = \int X \, \mathrm{d}\mu = \int X(\mathbb{I}_{A_n} + \mathbb{I}_{A_n^c}) \, \mathrm{d}\mu \geq \int \frac{1}{n}\mathbb{I}_{A_n} + 0 \, \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n).$$

$\Rightarrow \mu(A_n) = 0$

$\Rightarrow$

$$\mu(\underbrace{\{X > 0\}}_{=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X>\frac{1}{n}\}}) \overset{\text{Stetigkeit des Maßes von unten}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

$\Rightarrow \mu(\{X \neq 0\}) \overset{X\geq 0}{=} \mu(\{X > 0\}) = 0$

$\Rightarrow X = 0$ μ–f.s.

Lösung 30.

Lösung: Sei $x_0 \in U$ fest gewählt und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge mit $h_n \to 0$, und

$$g_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g_n(\omega) := f(x_0 + h_n, \omega) - f(x_0, \omega).$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_n = 0$ μ-fast überall auf Ω nach (2). Sei nun $N \in \mathcal{A}$ die Nullmenge, auf der diese Konvergenz nicht gilt.

Sei nun $\omega \in \Omega\backslash N$ fest gewählt. Es folgt mit Voraussetzung (2):

$$|g_n(\omega)| \leq 2 \cdot g(\omega).$$

Das bedeutet $|g_n| \leq 2g$ μ-fast überall.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left| \int f(x_0 + h_n, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega) - \int f(x_0, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega) \right| &\overset{\text{Lin.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{dom. Konv.}}{=} \int \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int 0 \, \mathrm{d}\mu(\omega) = 0.\end{aligned}$$

Da die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig gewählt war, folgt die Stetigkeit von von $x \mapsto \int f(x, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ in x_0.

Lösung 31.

Lösung:

(a) (i) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| \leq x^{-5/2}\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x) =: g(x),$$

und g ist λ-integrierbar, denn:

$$\int g(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \overset{\text{VL 1.52 Riemann=Lebesgue}}{=} \int_1^\infty x^{-5/2} \, \mathrm{d}x = [-\frac{2}{3}x^{-3/2}]_1^\infty = \frac{2}{3}.$$

Weiter: $f_n(x) \to 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty]} \frac{\sqrt{x}}{1 + nx^3} \, \mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\lambda \overset{\text{dom. Konv.}}{=} \int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda = \int 0 \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

(ii) Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebige Folge mit $\lambda_n \uparrow 1$, oBdA. $\lambda_n \in (0,1)$

Definiere $g_n = \sum_{k=1}^\infty \frac{(\frac{\lambda_n}{2})^k}{(2-\lambda_n)^{(k^2)}} \mathbb{I}_{\{k\}}$. Dann gilt mit dem Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$:

$$\lim_{\lambda\uparrow 1} \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda/2)^k}{(2-\lambda)^{(k^2)}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda_n/2)^k}{(2-\lambda_n)^{(k^2)}} = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu_Z$$

$\lambda_n \in (0,1)$, $\lambda_n \uparrow \Rightarrow g_n \uparrow$.

Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ gilt $g_n(k) = \frac{(\frac{\lambda_n}{2})^k}{(2-\lambda_n)^{(k^2)}} \to (\frac{1}{2})^k$, d.h. $g_n \uparrow g := \sum_{k=1}^\infty (\frac{1}{2})^k \mathbb{I}_{\{k\}}$.

Insgesamt: $0 \le g_n \uparrow g$. $\Rightarrow$

$$\lim_{\lambda\uparrow 1} \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda/2)^k}{(2-\lambda)^{(k^2)}} = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu_Z \overset{\text{mon. Konv.}}{=} \int \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu_Z = \int g \, \mathrm{d}\mu_Z = \sum_{k=1}^\infty (\frac{1}{2})^k = 1.$$

(alternativ ist auch dominierte Konvergenz möglich; es gilt $0 \le g_n \le g$).

(b) Es gilt $f_n \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Es gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n = 1, \qquad \int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda = \int 0 \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

Es gilt $f_n \ge 0$.

Der Satz von der monotonen Konvergenz ist nicht anwendbar, da $f_n \uparrow$ nicht gilt.

Der Satz von der dominierten Konvergenz ist nicht anwendbar, da es keine λ-integrierbare Funktion g gibt mit $f_n \le g$.

(c) Es gilt

$$\int f_n \, \mathrm{d}\lambda \overset{\text{VL 1.52}}{=} n \int_0^{1/n} 1 \, \mathrm{d}x = 1.$$

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\lambda = \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$.

Limes superior/Inferior von f_n: Es ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

d.h. $f_n \to f := 0$ λ-f.s. ($\lambda(\{0\}) = 0$).
Damit gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\lambda = 1 > 0 = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda, \qquad \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\lambda = 1 > 0 = \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda,$$

d.h. die liminf-Ungleichung ist erfüllt, die limsup-Ungleichung nicht.
Die limsup-Ungleichung gilt nicht, da es kein λ-integrierbares g mit $f_n \le g$ gibt.

Lösung 32.

Lösung:

(a) Es ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $0 \le |f|\mathbb{I}_{\{|f|\ \ge n\}} \le |f|$.

Außerdem: $\lim_{n\to\infty} |f|\mathbb{I}_{\{|f|\ge n\}} = |f|\mathbb{I}_{\{f=\infty\}} = 0$ μ-f.s.

Der letzte Schritt ($= 0$) gilt nur μ-f.s. Wir zeigen dazu: $\mu(\{f = \infty\}) = 0$.
Beweis: Angenommen, $\mu(\{f = \infty\}) > 0 \Rightarrow \int |f|\ \mathrm{d}\mu \ge \int \infty \cdot \mathbb{I}_{\{f=\infty\}}\ \mathrm{d}\mu = \infty\mu(\{f = \infty\}) = \infty$, Widerspruch zu f μ-integrierbar.

Allgemeine Regel also: f μ-integrierbar $\Rightarrow \mu(\{f = \infty\}) = 0$.

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int |f| \cdot \mathbb{I}_{\{|f|\ge n\}}\ \mathrm{d}\mu \overset{\text{dom. Konv.}}{=} \int \lim_{n\to\infty} |f| \cdot \mathbb{I}_{\{|f|\ge n\}}\ \mathrm{d}\mu = \int 0\ \mathrm{d}\mu = 0.$$

(b) Definiere $g_k := \sum_{n=1}^k f_n$.
$f_n \ge 0 \Rightarrow 0 \le g_k \uparrow g := \sum_{n=1}^\infty f_n$.

$\Rightarrow$

$$\int \sum_{n=1}^\infty f_n\ \mathrm{d}\mu = \int g\ \mathrm{d}\mu \overset{\text{mon. Konv.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int g_k\ \mathrm{d}\mu \overset{\text{Lin. Maßint.}}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \int f_n\ \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n\ \mathrm{d}\mu. \quad (*)$$

<u>Spezialfall $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, $\mu = \mu_Z$ Zählmaß und $f_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k}\mathbb{I}_{\{k\}}$.</u> Wir berechnen dafür beide Seiten von (*).
Linke Seite von (*): Es gilt für jedes $x \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = a_{n,x}$, und daher

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \sum_{n=1}^\infty a_{n,x}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty f_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=1}^\infty a_{n,k}\right)\mathbb{I}_{\{k\}}$ (Aussehen der Funktion $\sum_{n=1}^\infty f_n$)

$\Rightarrow \int \sum_{n=1}^\infty f_n\ \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=1}^\infty a_{n,k}\right)$.
Rechte Seite von (*): $\int f_n\ \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\ \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k}$.

(*) liefert also:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k}.$$

Lösung 33.

Lösung:

(a) Es ist für $A \in \mathcal{A}$:

$$(\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = \int_A f_1 \, \mathrm{d}\mu + \int_A f_2 \, \mathrm{d}\mu = \int_A (f_1 + f_2) \, \mathrm{d}\mu.$$

(insbesondere folgt $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$).
$\overset{\text{Radon-Nikodym (Dichte eindeutig)}}{\Rightarrow} \frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu} = f_1 + f_2$ μ-f.s.

(b) $\mu \ll \nu \overset{\text{Radon-Nikodym}}{\Rightarrow} \frac{d\mu}{d\nu}$ existiert.
Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. $\Rightarrow$

$$\mu(A) = \int_A \cdot \frac{d\mu}{d\nu} \, \mathrm{d}\nu \overset{1.64,\text{ Def. } \frac{d\nu}{d\mu}}{=} \int_A \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu} \, \mathrm{d}\mu.$$

$\overset{\text{Radon-Nikodym (Dichte eindeutig)}}{\Rightarrow} \frac{d\mu}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu}$ μ-f.s.
P17(a) $\Rightarrow \frac{d\mu}{d\mu} = 1$ μ-f.s.
$\Rightarrow \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu} = 1$ μ-f.s. (insbes. sind beide Dichten f.s. $\neq 0$) $\Rightarrow \frac{d\mu}{d\nu} = (\frac{d\nu}{d\mu})^{-1}$ μ-f.s.
$\nu \ll \mu \Rightarrow$ Aussage gilt auch ν-f.s.

(c) Sei $X = X^+ - X^-$ die Aufspaltung von X in Positiv- und Negativteil.
Vorlesung 1.60 $\Rightarrow$

$$\mu^\pm : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mu^\pm(F) := \int_F X^\pm \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

sind Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ (Einschränkung auf $\mathcal{F}$).

- $\mu^\pm$ sind endliche Maße, denn:

$$\mu^\pm(\Omega) = \int X^\pm \, \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}|X| < \infty.$$

- Es gilt $\mu^\pm \ll \mathbb{P}$, denn: Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig mit $\mathbb{P}(F) = 0 \Rightarrow$

$$\mu^\pm(F) = \int_F X^\pm \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

$\overset{\text{Radon-Nikodym}}{\Rightarrow}$ Es gibt $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbare Abbildungen (Dichten) $Z^\pm : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall F \in \mathcal{F} : \quad \mu^\pm(F) = \int_F Z^\pm \, \mathrm{d}\mathbb{P}. \quad (*)$$

Definiere $Z := \tilde{Z}^+ - \tilde{Z}^- \Rightarrow Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-messbar und

$$\forall F \in \mathcal{F} : \quad \int_F X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X^+ \, \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_F X^- \, \mathrm{d}\mathbb{P} \overset{(*),\text{ Def. } \mu^\pm}{=} \int_F Z^+ \, \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_F Z^- \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F Z \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Lösung 34.

Lösung:

(a)
- $\mathbb{P}_2 \ll \mathbb{P}_1$ gilt nicht: Für $A = (-\infty, 0) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ gilt
  $\mathbb{P}_1(A) = \int_A f_1 \, \mathrm{d}\lambda = \int 0 \, \mathrm{d}\lambda = 0$, aber
  $\mathbb{P}_2(A) = \int_A f_2 \, \mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} > 0$.

- $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ gilt: Sei $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ beliebig mit
$$0 = \mathbb{P}_2(A) = \int_A f_2 \,\mathrm{d}\lambda = \int \underbrace{\mathbb{I}_A f_2}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\lambda.$$
$\Rightarrow \mathbb{I}_A f_2 = 0$ λ-f.s.
$\overset{f_2>0}{\Rightarrow} \mathbb{I}_A = 0$ λ-f.s.
$\Rightarrow \lambda(A) = 0$ (*).
$\Rightarrow$
$$\mathbb{P}_1(A) = \int_A f_1 \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$
Der Beweis zeigt auch, dass $\lambda \ll \mathbb{P}_2$ gilt (breche bei (*) ab).
- Berechnung Dichte $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$: Nach Satz 1.65 (Transformationssatz für Dichten) gilt
$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2} \overset{1.65}{=} \frac{d\mathbb{P}_1}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\mathbb{P}_2} \overset{\text{A17(b)}}{=} \frac{d\mathbb{P}_1}{d\lambda} \cdot \left(\frac{d\mathbb{P}_2}{d\lambda}\right)^{-1} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{e^{-x}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \quad \lambda - \text{f.s.}$$

(b) (i) Sei $m_1 > m_2$.
Dann gilt $\mathbb{P}_2(\{m_1\}) = \int_{\{m_1\}} f_2(x) \,\mathrm{d}\mu_Z(x) = f_2(m_1) = 0$, aber
$\mathbb{P}_1(\{m_1\}) = \int_{\{m_1\}} f_1(x) \,\mathrm{d}\mu_Z(x) = f_1(m_1) = \binom{m_1}{m_1} p^{m_1} = p^{m_1} > 0$.
In diesem Fall gilt also nicht $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$.

Sei nun $m_1 \leq m_2$, und sei $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ beliebig mit $\mathbb{P}_2(A) = 0$. $\Rightarrow$
$$0 = \mathbb{P}_2(A) = \int_A f_2(x) \,\mathrm{d}\mu_Z(x) = \sum_{x \in A} f_2(x) = \sum_{x \in A \cap \{0,...,m_2\}} f_2(x).$$
$f_2(x) = \binom{m_2}{x} p^x (1-p)^{m_2 - x} > 0$ für alle $x \in \{0, ..., m_2\} \Rightarrow A \cap \{0, ..., m_2\} = \emptyset$.
$\Rightarrow$
$$\mathbb{P}_1(A) = \sum_{x \in A} f_1(x) = \sum_{x \in A \cap \{0,...,m_1\}} f_1(x) = 0 \quad \text{(Summation über leere Menge).}$$
Hier gilt also $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$.

(ii) Berechnung der Dichte $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ im Falle $m_1 \leq m_2$:
- Entweder wie in (a) bei Nutzung von $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \ll \tilde{\mu}_Z$ mit dem eingeschränkten Zählmaß
$$\tilde{\mu}_Z : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \tilde{\mu}_Z(A) = |A \cap \{0, ..., m_2\}|.$$
(Dann ist weiterhin $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\tilde{\mu}_Z} = f_1$, $\frac{d\mathbb{P}_2}{d\tilde{\mu}_Z} = f_2$).
- Alternative direkte Argumentation: Sei $g := \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$. Dann gilt für alle $A = \{i\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$, $i = 0, ..., m_2$:
$$f_1(i) = \int_{\{i\}} f_1 \,\mathrm{d}\mu_Z = \mathbb{P}_1(\{i\}) = \int_{\{i\}} g \,\mathrm{d}\mathbb{P}_2 = \int_{\{i\}} g \,\mathrm{d}\mathbb{P}_2 = \int_{\{i\}} g f_2 \,\mathrm{d}\mu_Z = g(i) f_2(i),$$
d.h. $g(i) = \frac{f_1(i)}{f_2(i)}$. Da $\mathbb{P}_2(\{n \in \mathbb{N}_0 : n > m_2\}) = 0$, ist also
$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2} = g = \frac{f_1}{f_2} \quad \mathbb{P}_2 - \text{f.s.}$$

Zwei konkrete Dichten $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2} : \Omega \to \mathbb{R}$ sind

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}(n) = \begin{cases} \frac{f_1(n)}{f_2(n)}, & 0 \leq n \leq m_2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}, \qquad \text{sowie} \qquad \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}(n) = \begin{cases} \frac{f_1(n)}{f_2(n)}, & 0 \leq n \leq m_2, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese unterscheiden sich nur auf der $\mathbb{P}_2$-Nullmenge $\{n \in \mathbb{N}_0 : n > m_2\}$.

Lösung 35.
Lösung:

(a) '$\nu \ll \mu$': Sei $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$. $\Rightarrow |N| = 0 \Rightarrow N = \emptyset \Rightarrow \nu(N) = \nu(\emptyset) \overset{\emptyset \text{ abzählbar}}{=} 0$.

(b) ν hat keine Dichte bzgl. μ: Angenommen, ν besäße eine Dichte $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bzgl. μ. Dann würde gelten:

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Insbesondere erhalten wir für $x \in \Omega$ (es ist $\{x\}$ endlich, also $\{x\} \in \mathcal{A}$):

$$\begin{aligned} 0 \overset{\{x\} \text{ abzählbar}}{=} \nu(\{x\}) &= \int_{\{x\}} f \, \mathrm{d}\mu = \int \underbrace{f \cdot \mathbb{I}_{\{x\}}}_{f(x) \cdot \mathbb{I}_{\{x\}}} \, \mathrm{d}\mu \\ &\overset{\substack{\text{Maßint. von} \\ \text{prim. Fkt.}}}{=} f(x) \cdot \mu(\{x\}) \overset{\{x\} \text{ endlich}}{=} f(x) \cdot |\{x\}| = f(x), \end{aligned}$$

d.h. $\forall x \in \Omega : f(x) = 0$.
Wählen wir aber $A = \Omega \in \mathcal{A}$ ($\Omega^c = \emptyset$ abzählbar, so folgt

$$1 = \nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A 0 \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

Widerspruch!

(c) Der Satz von Radon-Nikodym kann in obigen Situationen nicht angewendet werden, da μ nicht σ-endlich ist:
Angenommen, μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ σ-endlich $\Rightarrow$ Es gibt disjunkte $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty$ (*).
$\Rightarrow$ Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit A_N überabzählbar (sonst wäre Ω als abzählbare Vereinigung von den abzählbaren Mengen A_n abzählbar).
$\Rightarrow \mu(A_N) = \infty$, Widerspruch zu (*).

Lösung 36.
Lösung: Allgemeine Formel jeweils, falls $\mathbb{P}^X$ Dichte f bzgl. Maß μ besitzt:

$$\mathbb{E}g(X) = \int g(X) \, \mathrm{d}\mathbb{P} \overset{\text{Trafo } 1.67}{=} \int g \, \mathrm{d}\mathbb{P}^X \overset{\text{Trafo Dichte } 1.64}{=} \int g f d i f \mu.$$

Falls μ Lebesgue- oder Zählmaß, kann das Integral nun mit Riemannintegral oder unendlicher Summe ausgerechnet werden.

(a) (i) Es ist

$$\mathbb{E}X = \int xf(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

und

$$\mathbb{E}e^X = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1.$$

(ii) $\varphi(x) = e^x$ ist konvex. Jensen-Ungleichung $\Rightarrow \exp(\mathbb{E}X) = \varphi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}\varphi(X) = \mathbb{E}e^X$. Hier ist tatsächlich $1.64 \approx \exp(\frac{1}{2}) \leq e - 1 \approx 1.71$.

(b) (i) Wende Hölder-Ungleichung mit dem gegebenen $q > 1$ (und $q' > 1$ so gewählt, dass $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, d.h. $q' = \frac{q}{q-1}$) an:

$$\mathbb{E}|X \cdot 1| \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[1^{q'}]^{1/q'}}_{=1}.$$

Das liefert $\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$.

(ii) Hier ist

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}X = \int xf(x)d\mu_Z(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} kf(k) = 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) = p,$$

und

$$\mathbb{E}[|X|^q] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^q f(k) = 0^q \cdot f(0) + 1^q \cdot f(1) = p.$$

Tatsächlich gilt $\mathbb{E}|X| = p \leq p^{1/q} = \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$ wegen $p \in (0, 1)$.

Lösung 37.

Lösung:

(a) Es ist für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \int \mathbb{I}_A \, \mathrm{d}\mu = \int_A 1 \, \mathrm{d}\mu.$$

Insbesondere folgt $\mu \ll \mu$ (klar).
μ σ-endlich $\overset{\text{Radon-Nikodym (Dichte eindeutig)}}{\Rightarrow} \frac{d\mu}{d\mu} = 1$ μ-f.s.

(b) Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig mit $\mu(A) = 0 \overset{\nu\ll\mu}{\Rightarrow} \nu(A) = 0 \overset{\rho\ll\nu}{\Rightarrow} \rho(A) = 0$.
$\Rightarrow \rho \ll \mu$.

Wir wollen $\frac{d\rho}{d\mu}$ ermitteln, d.h. wir müssen $\rho(A) = ... = \int_A ...d\mu$ darstellen.
Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. $\Rightarrow$

$$\rho(A) \overset{\text{Def. } \frac{d\rho}{d\nu}}{=} \int_A \frac{d\rho}{d\nu} d\nu \overset{\text{1.64, Def. } \frac{d\nu}{d\mu}}{=} \int_A \frac{d\rho}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

ρ, μ σ-endlich $\overset{\text{Radon-Nikodym (Dichte eindeutig)}}{\Rightarrow} \frac{d\rho}{d\mu} = \frac{d\rho}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu}$ μ-f.s.

(c) Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig mit $(\mu+\nu)(A) = 0$.
$\overset{\mu(A)\geq 0}{\Rightarrow} \nu(A) = 0$.
$\Rightarrow \nu \ll \mu + \nu$.

Sei $g := \frac{d\nu}{d(\nu+\mu)}$ (existiert nach Radon-Nikodym).

Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int_A g \, \mathrm{d}(\nu+\mu) \overset{\text{Präsenzblatt 4, P13}}{=} \int_A g \, \mathrm{d}\nu + \int_A g \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_A gf \, \mathrm{d}\mu + \int_A g \, \mathrm{d}\mu = \int_A g(f+1) \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

$\overset{\text{Radon-Nikodym (Dichte eindeutig)}}{\Rightarrow} f = \frac{d\nu}{d\mu} = g(f+1)$ μ-f.s.
$\Rightarrow$

$$g = \frac{f}{f+1} \quad \mu - \text{f.s.}$$

Da $\nu \ll \mu$, folgt insbesondere $\frac{d\nu}{d(\nu+\mu)} = g = \frac{f}{f+1}$ $(\nu+\mu)$-f.s. (erst dadurch ist klar, dass es sich um eine Dichte bzgl. $\nu+\mu$ handelt)
Anmerkung: Beachte, dass der Satz von Radon-Nikodym bereits liefert, dass die Dichte nur Werte in $[0,\infty)$ besitzt. Das Problem $f = \infty$ bzw. $\frac{f}{f+1} = "\frac{\infty}{\infty}"$ kann daher hier nicht auftauchen!

Lösung 38.
Lösung:

(a) (i) Sei zunächst $a_2 < a_1$. Wähle $A = (a_2, a_1] \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$.
Dann gilt $\mathbb{P}_2(A) = \int_{(a_2,a_1]} \frac{1}{a_2}\mathbb{I}_{[0,a_2]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = 0$, aber
$\mathbb{P}_1(A) = \int_{(a_2,a_1]} \frac{1}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{a_2}^{a_1} \frac{1}{a_1} \, \mathrm{d}x = \frac{a_1-a_2}{a_1} > 0$.
Daher gilt in diesen Fällen nicht $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$.

Sei nun $a_2 \geq a_1$, und sei $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ beliebig mit $\mathbb{P}_2(A) = 0$. Dann ist

$$0 = \mathbb{P}_2(A) = \int_A \frac{1}{a_2}\mathbb{I}_{[0,a_2]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{a_2}\int \mathbb{I}_{A\cap[0,a_2]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x),$$

$\Rightarrow \lambda(A \cap [0,a_2]) = 0$ (*).
$a_1 \leq a_2 \Rightarrow \lambda(A \cap [0,a_1]) \leq \lambda(A \cap [0,a_2]) = 0$
$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}_1(A) = \int_A \frac{1}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{a_1}\int \mathbb{I}_{A\cap[0,a_1]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

In diesem Fall gilt also $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$.

(ii) Für die Bestimmung der Dichte gibt es zwei Möglichkeiten:
- (Konstruktiv) Definiere das Maß $\tilde{\lambda}(A) := \lambda(A \cap [0,a_2])$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.
(*) $\Rightarrow \tilde{\lambda} \ll \mathbb{P}_2$.

Außerdem $\mathbb{P}_2 \ll \tilde{\lambda}$ mit Dichte $\frac{d\mathbb{P}_2}{d\tilde{\lambda}} = \frac{1}{a_2}$ (klar aus Def. von $\mathbb{P}_2$ mittels λ)
$\Rightarrow$

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2} = \frac{d\mathbb{P}_1}{d\tilde{\lambda}} \cdot \frac{d\tilde{\lambda}}{d\mathbb{P}_2} = \frac{d\mathbb{P}_1}{d\tilde{\lambda}} \cdot \left(\frac{d\mathbb{P}_2}{d\tilde{\lambda}}\right)^{-1} = \frac{\frac{1}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]}}{\frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]} \quad \mathbb{P}_2 - \text{f.s.}$$

Da $\mathbb{P}_2([0,a_2]^c) = 0$, können wir $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ beliebig auf der Menge $[0,a_2]^c$ abändern. Zwei Möglichkeiten für $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ sind daher:

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}(x) = \frac{a_2}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]}(x), \qquad \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}(x) = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]}(x), & x \in [0,a_2], \\ 1, & x \in [0,a_2]^c. \end{cases}$$

(einmal 0 auf $[0,a_2]^c$, einmal 1 auf $[0,a_2]^c$).

– (Nachrechnen; bei Vorrechnen nur kurz ansprechen): Sollte die Dichte existieren, so erwarten wir für $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ stets im Wesentlichen $\frac{f_1}{f_2}$ (wo $f_2 \neq 0$, sonst 0). Als Beweis genügt es, diese Dichte vorzuschlagen und nachzurechnen, dass es sich um eine Dichte handelt. Dies ist aber im Allgemeinen aufwendiger, da man noch mit der Eindeutigkeit von Maßen argumentieren muss (STOP).
Sei also $h(x) := \frac{a_2}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]}(x)$. Wir zeigen, dass für alle $A \in \mathcal{E} := \{(-\infty,x] : x \in \mathbb{R}\}$:

$$\mathbb{P}_1(A) = \int_A h \; \mathrm{d}\mathbb{P}_2 \quad (**)$$

Da beide Seiten endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ definieren (VL 1.60 für rechte Seite), $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil $\Rightarrow$ (**) gilt für alle $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow h = \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ $\mathbb{P}_2$-f.s.

Nachweis von (**): Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\int_{(-\infty,x]} h \; \mathrm{d}\mathbb{P}_2 &\overset{1.64}{=} \int_{(-\infty,x]} h \frac{d\mathbb{P}_2}{d\lambda} d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{a_2}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]}(y)\frac{1}{a_2}\mathbb{I}_{[0,a_2]}(y) dy \\ &\overset{a_2 \geq a_1}{=} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a_1}\mathbb{I}_{[0,a_1]}(y) dy \overset{def}{=} \mathbb{P}_1((-\infty,x]).\end{aligned}$$

(b) (i) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,\infty)$ beliebig. Sei $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ beliebig und $\mathbb{P}_2(A) = 0$. Dann gilt

$$0 = \mathbb{P}_2(A) = \int f_2 \; \mathrm{d}\mu_Z = \sum_{x \in A} f_2(x) = \underbrace{e^{-\lambda_2}}_{>0} \sum_{x \in A} \underbrace{\frac{\lambda_2^x}{x!}}_{>0}.$$

$\Rightarrow A = \emptyset$
$\Rightarrow \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_1(\emptyset) = 0$
(und auch $\mu_Z(A) = 0$ (*)).
Es folgt $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$.

(ii) Bestimmung der Dichte $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$: In (*) haben wir gesehen: $\mu_Z \ll \mathbb{P}_2$. $\Rightarrow$

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2} \overset{1.64}{=} \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mu_Z} \cdot \frac{d\mu_Z}{d\mathbb{P}_2} \overset{A17(b)}{=} \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mu_Z} \cdot \left(\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mu_Z}\right)^{-1} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Lösung 39.

Lösung:

(a) Zu zeigen sind die drei Maßeigenschaften (an Übungsleiter: die drei Maßeigenschaften nur kurz kommentieren statt ausführlich vorrechnen)

- $\nu(\emptyset) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \frac{\overbrace{\mu(E_n \cap \emptyset)}^{=\mu(\emptyset)=0}}{\mu(E_n)+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0,$
- Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ ist $\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \underbrace{\frac{\mu(E_n \cap A)}{\mu(E_n)+1}}_{\geq 0} \geq 0,$
- Für eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ ist

$$\begin{aligned}\nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \frac{\overbrace{\mu(E_n \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)}^{=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(E_n\cap A_i)}}{\mu(E_n)+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{2^{-n} \cdot \frac{\mu(E_n \cap A_i)}{\mu(E_n)+1}}_{\geq 0} \\ &\overset{P16(b)}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \frac{\mu(E_n \cap A_i)}{\mu(E_n)+1}}_{=\nu(A_i)}.\end{aligned}$$

ν ist endlich, denn

$$\nu(\Omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{\mu(E_n \cap \Omega)}^{=\mu(E_n)}}{\mu(E_n)+1}}_{\leq 1} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \leq 1.$$

(b)
- '$\nu \ll \mu$': Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0 \Rightarrow$

$$\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \frac{\overbrace{\mu(E_n \cap A)}^{\leq\mu(A)=0}}{\mu(E_n)+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

  $\Rightarrow \nu \ll \mu.$
- '$\mu \ll \nu$': Sei $A \in \mathcal{A}$ mit

$$0 = \nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{2^{-n} \cdot \frac{\mu(E_n \cap A)}{\mu(E_n)+1}}_{\geq 0}$$

  $\Rightarrow$ Alle Summanden 0 $\Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mu(E_n \cap A) = 0$
  $\Rightarrow \mu(A) \overset{\sum_{n\in\mathbb{N}} E_n=\Omega}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$
  $\Rightarrow \mu \ll \nu.$

(c)
- '$\frac{d\nu}{d\mu}$': Für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \frac{\overbrace{\mu(E_n \cap A)}^{=\int \mathbb{I}_{A\cap E_n}\ \mathrm{d}\mu = \int_A \mathbb{I}_{E_n}\ \mathrm{d}\mu}}{\mu(E_n)+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_A \underbrace{2^{-n}\frac{\mathbb{I}_{E_n}}{\mu(E_n)+1}}_{\geq 0}\ \mathrm{d}\mu$$

$$\overset{P16(b)}{=} \int_A \underbrace{\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\frac{\mathbb{I}_{E_n}}{\mu(E_n)+1}\Big)}_{=:f}\ \mathrm{d}\mu.$$

μ σ-endlich $\overset{\text{Radon-Nikodym (Dichte eindeutig)}}{\Rightarrow}$ $\frac{d\nu}{d\mu} = f$ μ-f.s.

- '$\frac{d\mu}{d\nu}$': A17(b) $\Rightarrow$ $\frac{d\mu}{d\nu} = (\frac{d\nu}{d\mu})^{-1} = \frac{1}{f}$ ν-f.s.

Lösung 40.

Lösung: Allgemeine Formel jeweils, falls $\mathbb{P}^X$ Dichte f bzgl. Maß μ besitzt:

$$\mathbb{E}g(X) = \int g(X)\ \mathrm{d}\mathbb{P} \overset{\text{Trafo 1.67}}{=} \int g\ \mathrm{d}\mathbb{P}^X \overset{\text{Trafo Dichte 1.64}}{=} \int gfdif\mu.$$

Falls μ Lebesgue- oder Zählmaß, kann das Integral nun mit Riemannintegral oder unendlicher Summe ausgerechnet werden.

(a) (i) Hier ist

$$\mathbb{E}X = \int xf(x)d\mu_Z(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} kf(k) = 1\cdot f(1) + 2\cdot f(2) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2},$$

und

$$\mathbb{E}\log(X) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log(k)f(k) = \log(1)\cdot f(1) + \log(2)\cdot f(2) = \frac{1}{2}\log(2).$$

(ii) $\varphi(x) = -\log(x)$ ist konvex. Jensen-Ungleichung $\Rightarrow -\log(\mathbb{E}X) = \varphi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}\varphi(X) = \mathbb{E}[-\log(X)]$.
$\Rightarrow \mathbb{E}\log(X) \leq \log(\mathbb{E}X)$.
Hier ist tatsächlich $\mathbb{E}\log(X) = \frac{1}{2}\log(2) \approx 0.35 \leq 0.41 \approx \log(\frac{3}{2}) = \log(\mathbb{E}X)$

(b) (i) Es ist

$$\mathbb{E}[X^2] = \int x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

und

$$\mathbb{E}[|X|^3] = \mathbb{E}[X^3] = \int x^3 f(x)dx = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4},$$

(ii) Zwei Möglichkeiten:
- Wende Hölder-Ungleichung an mit $q = \frac{3}{2}$ (und $q' > 1$ so gewählt, dass $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, d.h. $q' = 3$) an:

$$\mathbb{E}|X^2\cdot 1| \leq \mathbb{E}[(X^2)^q]^{1/q} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[1^{q'}]^{1/q'}}_{=1}.$$

Das liefert $\mathbb{E}[X^2] \leq \mathbb{E}[|X|^3]^{2/3} \Rightarrow \mathbb{E}[X^2]^{1/2} \leq \mathbb{E}[|X|^3]^{1/3}$.

- $\varphi(x) = x^{3/2}$ ist konvex. Jensen-Ungleichung $\Rightarrow \mathbb{E}[X^2]^{3/2} = \varphi(\mathbb{E}[X^2]) \leq \mathbb{E}\varphi(X^2) = \mathbb{E}[|X|^3]$.

Tatsächlich gilt hier $\mathbb{E}[X^2]^{1/2} = (\frac{1}{3})^{1/2} \approx 0.58 \leq 0.63 \approx (\frac{1}{4})^{1/3} = \mathbb{E}[|X|^3]^{1/3}$.

Lösung 41.
Lösung:

(a) Wir zeigen die Integrierbarkeit:

- Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int |x^n e^{-x^2/2} f(x)| d\lambda(x) &= \int |x|^n e^{-x^2/2} \cdot |f(x)| d\lambda(x) \\ &\leq \Big(\int |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x)\Big)^{1/2} \cdot \underbrace{\Big(\int |f(x)|^2 d\lambda(x)\Big)^{1/2}}_{<\infty}.\end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass
$$\int |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x) < \infty.$$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ ist die Dichte einer $N(0, \frac{1}{2})$-Verteilung, daher handelt es sich oben um die Momente einer Normalverteilung, diese sind endlich. Dies kann wie folgt gezeigt werden:
Sei zunächst $M \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist
$$\int |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x) = \int_{[-M,M]} |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x) + \int_{[-M,M]^c} |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x).$$
Da $|x|^{2n} e^{-x^2/2} \to 0$ $(|x| \to \infty)$, gibt es $M \in \mathbb{N}$ mit
$$\forall |x| > M : \quad |x|^{2n} e^{-x^2/2} \leq 1.$$
Dann ist
$$\begin{aligned}\int |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x) &= \int_{[-M,M]} |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x) + \int_{[-M,M]^c} |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x) \\ &\leq \int_{[-M,M]} |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x) + \int_{[-M,M]^c} e^{-x^2/2} d\lambda(x).\end{aligned}$$
Die Funktion $x \mapsto |x|^{2n} e^{-x^2}$ ist stetig und $[-M, M]$ kompakt, daher gibt es $C > 0$ mit $|x|^{2n} e^{-x^2} \leq C$ für alle $x \in [-M, M]$. Außerdem ist
$$\int_{[-M,M]^c} e^{-x^2/2} d\lambda(x) \leq \int e^{-x^2/2} d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}$$
als Dichte einer Standard-Normalverteilung. Es folgt
$$\int |x|^{2n} e^{-x^2} d\lambda(x) \leq 2MC + \sqrt{2\pi} < \infty.$$

- Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann ist für $x \in \mathbb{R}$: $|e^{ax}| = e^{\mathrm{Re}(a)x}$. Der Einfachheit halber nehmen wir daher in folgendem Beweis $a \in \mathbb{R}$ an. Dann ist mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int |e^{ax-x^2/2} f(x)| d\lambda(x) &= \int e^{ax-x^2/2} \cdot |f(x)| d\lambda(x) \\ &\leq \Big(\int e^{2ax-x^2} d\lambda(x) \Big)^{1/2} \cdot \underbrace{\Big(\int |f(x)|^2 d\lambda(x) \Big)^{1/2}}_{<\infty}. \end{aligned}$$

Es genügt also,

$$\int e^{2ax-x^2} d\lambda(x) < \infty$$

zu zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} \int e^{2ax-x^2} d\lambda(x) &= e^{a^2} \cdot \int e^{-a^2+2ax-x^2} d\lambda(x) = e^{a^2} \int e^{-(x-a)^2} d\lambda(x) \\ &= e^{a^2} \sqrt{2\pi \cdot (\frac{1}{2})} = e^{a^2} \sqrt{\pi} < \infty, \end{aligned}$$

da $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{1}{2})}} e^{-(x-a)^2}$ die Dichte einer $N(a, \frac{1}{2})$-Verteilung ist.

Beweis der Gleichheit (*): Wir wollen den Satz von Fubini anwenden, wobei die Summe $\sum_{n=0}^{\infty}$ als Integral bzgl. des Zählmaßes μ_Z auf $\mathbb{N}_0$ interpretiert wird. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int x^n e^{-x^2/2} f(x) d\lambda(x) &= \int \frac{a^n}{n!} \int x^n e^{-x^2/2} f(x) d\lambda(x) d\mu_Z(n) \\ &= \int \int \frac{(xa)^n}{n!} e^{-x^2/2} f(x) d\lambda(x) d\mu_Z(n). \qquad (**) \end{aligned}$$

Um den Satz von Fubini anwenden zu können, muss gezeigt werden, dass

$$\int \int \Big| \frac{(xa)^n}{n!} e^{-x^2/2} f(x) \Big| d\lambda(x) d\mu_Z(n) < \infty. \qquad (***)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int \int \Big| \frac{(xa)^n}{n!} e^{-x^2/2} f(x) \Big| d\lambda(x) d\mu_Z(n) &= \int \int \frac{|xa|^n}{n!} e^{-x^2/2} |f(x)| d\lambda(x) d\mu_Z(n) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int \underbrace{\Big(\int \frac{|xa|^n}{n!} d\mu_Z(n) \Big)}_{=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|xa|^n}{n!} = \exp(|xa|)} e^{-x^2/2} |f(x)| d\lambda(x) \\ &= \int e^{|x|\cdot|a|-x^2/2} |f(x)| d\lambda(x) \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \Big(\int e^{2|a|\cdot|x|-x^2} d\lambda(x) \Big)^{1/2} \cdot \underbrace{\Big(\int |f(x)|^2 d\lambda(x) \Big)^{1/2}}_{<\infty} \end{aligned}$$

Der erste Faktor kann wie zuvor behandelt werden:

$$\begin{aligned} \int e^{2|a|\cdot|x|-x^2} d\lambda(x) &= 2 \int_0^{\infty} e^{2|a|x-x^2} d\lambda(x) \\ &= 2e^{|a|^2} \int_0^{\infty} e^{-(x-|a|)^2} d\lambda(x) \\ &\leq 2e^{|a|^2} \int e^{-(x-|a|)^2} d\lambda(x) = 2e^{|a|^2} \sqrt{\pi} < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist (***) gezeigt und der Satz von Fubini kann in (**) angewandt werden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int x^n e^{-x^2/2} f(x) d\lambda(x) &= \int\int \frac{(xa)^n}{n!} e^{-x^2/2} f(x) d\lambda(x) d\mu_Z(n) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int\int \frac{(xa)^n}{n!} e^{-x^2/2} f(x) d\mu_Z(n) d\lambda(x) \\
&= \int \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xa)^n}{n!}\right)}_{=\exp(xa)} e^{-x^2/2} f(x) d\lambda(x) \\
&= \int e^{ax-x^2} f(x) d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

(b) Aus der Voraussetzung folgt, dass für alle $a \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\int e^{ax-\frac{x^2}{2}} f(x) d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \underbrace{\int x^n e^{-x^2/2} f(x) d\lambda(x)}_{=0} = 0.$$

Damit ist mit $a = ti$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \mathcal{F}(f)(t) = \int e^{itx} \Big(e^{-x^2/2} f(x)\Big) d\lambda(x) = 0.$$

$\Rightarrow \mathcal{F}(f) \equiv 0.$
Fourier-Rücktransformation liefert:

$$f = 0 \quad \lambda - f.s.$$

Lösung 42.
Lösung: Es ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

(a) Für $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
f_{\omega_1} : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) &\to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}), \quad f_{\omega_1}(\omega_2) := f(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{I}_{\{\omega_1\}}(\omega_2) + (-1) \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{N}\cap\{\omega_1-1\}}(\omega_2), \\
f_{\omega_2} : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) &\to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}), \quad f_{\omega_2}(\omega_1) := f(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{I}_{\{\omega_2\}}(\omega_1) + (-1) \cdot \mathbb{I}_{\{\omega_2+1\}}(\omega_1).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1}\,\mathrm{d}\mu_2\right)\,\mathrm{d}\mu_1 &= \int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{\{\omega_1\}} + (-1)\cdot\mathbb{I}_{\mathbb{N}\cap\{\omega_1-1\}}\,\mathrm{d}\mu_2\right)\,\mathrm{d}\mu_1\\
&= \int_{\mathbb{N}} \mu_2(\{\omega_1\}) + (-1)\cdot\mu_2(\underbrace{\mathbb{N}\cap\{\omega_1-1\}}_{=\begin{cases}\emptyset, & \omega_1=1\\ \{\omega_1-1\}, & \text{sonst}\end{cases}})\,\mathrm{d}\mu_1\\
&= \int_{\mathbb{N}} 1 + (-1)\cdot\mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{1\}}(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_1\\
&= \int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{\{1\}}(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_1\\
&= \mu(\{1\}) = 1,\\
\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}\,\mathrm{d}\mu_1\right)\,\mathrm{d}\mu_2 &= \int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}} \mathbb{I}_{\{\omega_2\}}(\omega_1) + (-1)\cdot\mathbb{I}_{\{\omega_2+1\}}\,\mathrm{d}\mu_1\right)\,\mathrm{d}\mu_2\\
&= \int_{\mathbb{N}} \mu_1(\{\omega_2\}) + (-1)\cdot\mu_1(\{\omega_2+1\})\,\mathrm{d}\mu_2\\
&= \int_{\mathbb{N}} (1-1)\,\mathrm{d}\mu_2\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini kann nicht angewandt werden, da:

- Nicht $f \geq 0$ überall gilt.
- $\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f|\,\mathrm{d}\mu_1\otimes\mu_2 = \infty$, denn:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f|\,\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)\\
=\;&\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mathbb{I}_{\{(n,n):n\in\mathbb{N}\}}(\omega_1,\omega_2) + \mathbb{I}_{\{(n+1,n):n\in\mathbb{N}\}}(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)\\
\overset{\text{Def.}}{=}\;&(\mu_1\otimes\mu_2)(\{(n,n):n\in\mathbb{N}\}) + (\mu_1\otimes\mu_2)(\{(n+1,n):n\in\mathbb{N}\})\\
\overset{\text{Maß}}{=}\;&\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(\mu_1\otimes\mu_2)(\{n,n\})}_{=\mu_1(\{n\})\cdot\mu_2(\{n\})=1\cdot1=1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(\mu_1\otimes\mu_2)(\{n+1,n\})}_{=\mu_1(\{n+1\})\cdot\mu_2(\{n\})=1\cdot1=1}\\
\overset{\text{Def. Produktmaß}}{=}\;&\sum_{n\in\mathbb{N}} 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = \infty + \infty = \infty.
\end{aligned}$$

(b) Für $\omega_1, \omega_2 \in (0,1)$ ist

$$\begin{aligned}
f_{\omega_1} : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) &\to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}), \quad f_{\omega_1}(\omega_2) := f(\omega_1,\omega_2) = \mathbb{I}_{\{\omega_1\}}(\omega_2),\\
f_{\omega_2} : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) &\to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}), \quad f_{\omega_2}(\omega_1) := f(\omega_1,\omega_2) = \mathbb{I}_{\{\omega_2\}}(\omega_1).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1}\,\mathrm{d}\mu_2\right)\,\mathrm{d}\mu_1 &= \int_{(0,1)}\left(\int_{(0,1)} \mathbb{I}_{\{\omega_1\}}\,\mathrm{d}\mu\right)\,\mathrm{d}\lambda \\
&\overset{\text{Def. Maßint.}}{=} \int_{(0,1)} \mu(\{\omega_1\})\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{(0,1)} 1\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \lambda((0,1)) = 1. \\
\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}\,\mathrm{d}\mu_1\right)\,\mathrm{d}\mu_2 &= \int_{(0,1)}\left(\int_{(0,1)} \mathbb{I}_{\{\omega_2\}}(\omega_1)\,\mathrm{d}\lambda\right)\,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{\text{Def. Maßint.}}{=} \int_{\mathbb{N}} \lambda(\{\omega_2\})\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{(0,1)} 0\,\mathrm{d}\mu = 0.
\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini kann nicht angewandt werden, da der Maßraum $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = ((0,1), \mathcal{P}((0,1)), \mu)$ nicht σ-endlich ist. Angenommen, μ wäre σ-endlich, dann gäbe es eine disjunkte Zerlegung $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}((0,1))$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,1)$ und $\forall n \in \mathbb{N}: \mu(A_n) = |A_n| < \infty$. Das bedeutet aber, dass alle A_n endlich sein müssen. Damit wäre $(0,1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n$ als abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen abzählbar, Widerspruch.

Lösung 43.

Lösung:

(a) Da alle auftretenden Terme nichtnegativ sind, ist der Satz von Fubini im Folgenden immer anwendbar. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^\alpha] &= \int X^\alpha\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{[0,\infty)} x^\alpha\,\mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) \\
&= \alpha \cdot \int_{[0,\infty)}\left(\int_0^x y^{\alpha-1}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) \\
&= \alpha \int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)} y^{\alpha-1}\mathbb{I}_{\{y<x\}}\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) \\
&\overset{\text{Fubini, alles}\geq 0}{=} \alpha \int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)} y^{\alpha-1}\mathbb{I}_{\{y<x\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}^X(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \alpha \int_{[0,\infty)} y^{\alpha-1}\int_{(y,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \alpha \int_{[0,\infty)} y^{\alpha-1}(1-F(y))\,\mathrm{d}\lambda(y)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $\int_{(y,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) = \mathbb{P}^X((y,\infty)) = 1 - \mathbb{P}^X((-\infty,y]) = 1 - F(y)$.

(b) (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int F(x)\ \mathrm{d}F(x) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{(-\infty,x]} 1\ \mathrm{d}F(y)\ \mathrm{d}F(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{(-\infty,x]}(y)\ \mathrm{d}F(y)\ \mathrm{d}F(x) \\
&\overset{\text{Fubini, alles} \geq 0}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{I}_{(-\infty,x]}(y)}_{=\mathbb{I}_{[y,\infty)}}(x)\ \mathrm{d}F(x)}_{=\int_{[y,\infty)} \mathrm{d}F(x) = 1-F(y-) \overset{F \text{ stetig}}{=} 1-F(y)} \quad \mathrm{d}F(y) \\
&= \int (1-F(y))\mathrm{d}F(y) = \underbrace{\int 1\ \mathrm{d}F(y)}_{=\int 1\ \mathrm{d}\mathbb{P}^X(y)=1} - \int F(y)\ \mathrm{d}F(y)
\end{aligned}$$

Es folgt (Addition $\int F(x)\ \mathrm{d}F(x)$ auf beiden Seiten):

$$2\int F(x)\ \mathrm{d}F(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int F(x)\ \mathrm{d}F(x) = \frac{1}{2}.$$

(ii) $F(X) \sim U[0,1] \Rightarrow \mathbb{P}^{F(X)}$ hat Dichte $f(y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$ bzgl. Lebesguemaß λ auf $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int F(x)\ \mathrm{d}\underbrace{F(x)}_{\mathbb{P}^X(x)} &\overset{\text{Trafo 1.67}}{=} \int F(X)\ \mathrm{d}\mathbb{P} \overset{\text{Trafo 1.67}}{=} \int y\ \mathrm{d}\mathbb{P}^{F(X)}(y) \\
&= \int y f(y)\ \mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^1 y\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Lösung 44.

Lösung:

(a) X, Y unabhängig $\Rightarrow \mathbb{P}^{(X,Y)} = \mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) &= \mathbb{P}(X+Y \leq z) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq z\}} \mathrm{d}\mathbb{P}^{(X,Y)}(x,y) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{(-\infty,z-y]} \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x)\ \mathrm{d}\mathbb{P}^Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z-y)\ \mathrm{d}F_Y(y).
\end{aligned}$$

(b) Bonus maßtheoretische Induktion nach h:

(1) $h = \mathbb{I}_A$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: Dann gilt $\mathbb{P}^Y$-f.s.

$$\begin{aligned}
\int h\ \mathrm{d}\mu &= \int \mathbb{I}_A\ \mathrm{d}\mu = \mu(A) = \mu(A+y) = \int \mathbb{I}_{A+y}(x)\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \mathbb{I}_A(x-y)\ \mathrm{d}\mu(x) = \int h(x-y)\ \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

(2) $h = \sum_{j=1}^k y_j \mathbb{I}_{A_j}$ primitive Funktion. Dann gilt $\mathbb{P}^Y$-f.s.:

$$\begin{aligned}
\int h\ \mathrm{d}\mu &\overset{\text{Def. Maßint.}}{=} \sum_{j=1}^k y_j \int \mathbb{I}_{A_j}\ \mathrm{d}\mu \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^k y_j \int \mathbb{I}_{A_j}(x-y)\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{\text{Lin. Maßint.}}{=} \int \sum_{j=1}^k y_j \mathbb{I}_{A_j}(x-y)\ \mathrm{d}\mu(x) = \int h(x-y)\ \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

(3) $h \geq 0$ nichtnegativ messbar numerisch $\Rightarrow$ Es gibt Folge $h_n \geq 0$ primitiver Funktionen mit $h_n \uparrow h$.
$\Rightarrow$ $g_n(x) := h_n(x-y)$, $g(x) := h(x-y)$ erfüllen $0 \leq g_n \uparrow g$ (damit mon. Konv. anwendbar).
Dann gilt $\mathbb{P}^Y$-f.s.:

$$\int h \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Def. Maßint}}{=} \lim_{n\to\infty} \int h_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int h_n(x-y)\,\mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{mon. Konv.}}{=} \int h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

(c) Wir zeigen für das $\cap$-stabile Erzeugendensystem $\mathcal{E} = \{(-\infty, z] : z \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:

$$\forall E \in \mathcal{E}: \quad \mathbb{P}^{X+Y}(E) = \int_E \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y)\,\mathrm{d}F_Y(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad (*)$$

Maßerweiterungssatz (linke, rechte Seite Maße) $\Rightarrow$ (*) gilt für alle $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \overset{\text{Radon-Nikodym Eind. Dichte}}{\Rightarrow}$ $\frac{d\mathbb{P}^{X+Y}}{d\mu} = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y)\,\mathrm{d}F_Y(y)$.

Wir zeigen nun (*): Sei $z \in \mathbb{R}$ beliebig.
Es gilt $\mathbb{P}^Y$-f.s.:

$$\begin{aligned} F_X(z-y) &= \int_{(-\infty,z-y]} f_X(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int f_X(x)\mathbb{I}_{(-\infty,z-y]}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{(b)}{=} \int f_X(x-y)\mathbb{I}_{(-\infty,z-y]}(x-y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{(-\infty,z]} f_X(x-y)\,\mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{X+Y}\big((-\infty,z]\big) &= F_{X+Y}(z) \overset{(a)}{=} \int_{\mathbb{R}} F_X(z-y)\,\mathrm{d}F_Y(y) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{(-\infty,z]} f_X(x-y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}F_Y(y) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(-\infty,z]} \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y)\,\mathrm{d}F_Y(y)\,\mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

(d) Es gilt hier $\mathbb{P}^X, \mathbb{P}^Y \ll \mu_Z$ mit Dichten

$$f_X(x) = \frac{\lambda_X^x}{x!} e^{-\lambda_X} \mathbb{I}_{\{x\geq 0\}}, \qquad f_Y(y) = \frac{\lambda_Y^y}{y!} e^{-\lambda_Y} \mathbb{I}_{\{y\geq 0\}},$$

wobei μ_Z das Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
μ_Z erfüllt die Translationsinvarianzbedingung, solange nur um eine ganze Zahl verschoben wird, d.h. $\mathbb{P}^Y$-f.s.

Sei $z \in \mathbb{N}_0$. Nach Aufgabe (c) gilt $X + Y \ll \mu_Z$ mit Dichte

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}\mu_Z(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(z-k) f_Y(k) = e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \sum_{k=0}^{z} \frac{\lambda_X^{z-k}}{(z-k)!} \frac{\lambda_Y^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}}{z!} \sum_{k=0}^{z} \binom{z}{k} \lambda_X^{z-k} \lambda_Y^k \overset{\text{Bin. Lehrsatz}}{=} \frac{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}}{z!} (\lambda_X+\lambda_Y)^z, \end{aligned}$$

$\Rightarrow X + Y \sim Poi(\lambda_X + \lambda_Y)$.

Lösung 45.

Lösung:

(a) (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(X) &= X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \overset{Bild(X)=\{1,2\}}{=} X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{1,2\}}) = X^{-1}(\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}) \\
&= \{\emptyset,\{a,b\},\{c,d\},\Omega\}, \\
\sigma(Y) &= Y^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \overset{Bild(Y)=\{1,2\}}{=} Y^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{1,2\}}) = Y^{-1}(\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}) \\
&= \{\emptyset,\{a,c\},\{b,d\},\Omega\}, \\
\sigma(Z) &= Z^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \overset{Bild(Z)=\{2,3\}}{=} Z^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{2,3\}}) = Z^{-1}(\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}) \\
&= \{\emptyset,\{a,d\},\{b,c\},\Omega\}.
\end{aligned}$$

(ii) X, Y sind unabhängig:

Update: Es genügt, nur jeweils EINE der unten stehenden Gleichheiten nachzurechnen, da bereits $\mathcal{E}_X = \{\{a,b\}\}$ und $\mathcal{E}_Y = \{\{a,c\}\}$ bzw. $\mathcal{E}_X = \{\{1\}\}$ und $\mathcal{E}_Y = \{\{1\}\}$ $\cap$-stabile Erzeugendensysteme sind!

- Möglichkeit 1: Nachprüfen auf $\cap$-stabilen Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_X = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$, $\mathcal{E}_Y = \{\{a,c\},\{b,d\}\}$ von $\sigma(X), \sigma(Y)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{a,b\}\cap\{a,c\}) &= \mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \mathbb{P}(\{a,b\})\cdot\mathbb{P}(\{a,c\}), \\
\mathbb{P}(\{a,b\}\cap\{b,d\}) &= \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbb{P}(\{a,b\})\cdot\mathbb{P}(\{b,d\}), \\
\mathbb{P}(\{c,d\}\cap\{a,c\}) &= \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \mathbb{P}(\{c,d\})\cdot\mathbb{P}(\{a,c\}), \\
\mathbb{P}(\{c,d\}\cap\{b,d\}) &= \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbb{P}(\{c,d\})\cdot\mathbb{P}(\{b,d\}).
\end{aligned}$$

$\overset{\text{VL 2.4}}{\Rightarrow}$ $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ unabhängig $\Rightarrow X, Y$ unabhängig.

- Möglichkeit 2: Nachprüfen auf $\cap$-stabilen Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_X = \{\{1\},\{2\}\}$ bzw. $\mathcal{E}_Y = \{\{1\},\{2\}\}$ von $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{1,2\}}$ bzw. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{1,2\}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1,Y=1) &= \mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1), \\
\mathbb{P}(X=1,Y=2) &= \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=2), \\
\mathbb{P}(X=2,Y=1) &= \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1), \\
\mathbb{P}(X=2,Y=2) &= \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=2).
\end{aligned}$$

$\overset{\text{VL 2.4}}{\Rightarrow}$ X, Y unabhängig.

X, Z sind nicht unabhängig:

- Möglichkeit 1 (Definition Unabhängigkeit über erzeugte σ-Algebren): Wähle $A_1 = \{a,b\} \in \sigma(X)$ und $A_2 = \{a,d\} \in \sigma(Z)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

- Möglichkeit 2 (über Urbilder): Es gilt

$$\mathbb{P}(X=1, Z=1) = \mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Z=1).$$

Y, Z sind unabhängig (Achtung: Ein allgemeines Argument der Form X, Y unabh., X, Z abh. $\Rightarrow Y, Z$ abh. gibt es nicht!):
Update: Es genügt, nur jeweils EINE der unten stehenden Gleichheiten nachzurechnen, da bereits $\mathcal{E}_Y = \{\{1\}\}$ und $\mathcal{E}_Z = \{\{1\}\}$ $\cap$-stabile Erzeugendensysteme sind!

- Nachprüfen auf $\cap$-stabilen Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_Y = \{\{1\}, \{2\}\}$ bzw. $\mathcal{E}_Z = \{\{1\}, \{3\}\}$ von $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{1,2\}}$ bzw. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{1,3\}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=1, Z=1) &= \mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y=1)\mathbb{P}(Z=1), \\
\mathbb{P}(Y=1, Z=3) &= \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y=1)\mathbb{P}(Z=3), \\
\mathbb{P}(Y=2, Z=1) &= \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y=2)\mathbb{P}(Z=1), \\
\mathbb{P}(Y=2, Z=3) &= \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y=2)\mathbb{P}(Z=3).
\end{aligned}$$

$\overset{\text{VL 2.4}}{\Rightarrow} Y, Z$ unabhängig.

(b) $Y_1 = \sin(X_1)$, $Y_2 := X_3 - X_2$ sind Funktionen von unterschiedlichen X_i
X_1, X_2, X_3 gemeinsam unabhängig $\overset{\text{VL 2.7}}{\Rightarrow} Y_1, Y_2$ unabhängig.

(c) (i) Es ist

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)d\lambda(y) \overset{\text{Riemann=Lebesg.}}{=} \int_0^1 dy \mathbb{I}_{[0,1]}(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x),$$

analog $f_Y(y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$.
Es gilt: $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{I}_{[0,1]^2}(x,y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\mathbb{I}_{[0,1]}(y) = f_X(x)f_Y(y) \overset{\text{VL 2.6}}{\Rightarrow} X, Y$ unabhängig.

(ii) Es ist

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)d\lambda(y) \overset{\text{Riemann=Lebesg.}}{=} \int_x^1 2dy \mathbb{I}_{[0,1]}(x) = 2(1-x)\mathbb{I}_{[0,1]}(x),$$

analog $f_Y(y) = 2y\mathbb{I}_{[0,1]}(y)$.
Auf $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x > y\}$ gilt:

$$f_{X,Y}(x,y) = 2\mathbb{I}_{\{0 \le x \le y \le 1\}} = 0 \neq 4(1-x)y\mathbb{I}_{[0,1]^2}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

und $\lambda(A) = \frac{1}{2} > 0 \overset{\text{VL 2.6}}{\Rightarrow} X, Y$ nicht unabhängig.

Lösung 46.

Lösung: *Anmerkung Tutor: Bitte besonders Anwendung von Fubini und die Änderung der Grenzen beim Vertauschen/Aufteilen der Integrale betonen/besprechen.*

(a) Es muss gelten: $\mathbb{P}^{(X,Y)})(\mathbb{R}^2) = 1$, d.h. $f_{X,Y}$ muss die folgende Normierungsbedingung erfüllen:

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}^{(X,Y)}(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}\lambda^2(x,y) \\
&\overset{\text{Fubini, alles} \geq 0}{=} c \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy \cdot \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y \leq 2\}}\ \mathrm{d}\lambda(y)\ \mathrm{d}\lambda(x) \\
&\overset{\text{Lebesg.} = \text{Riemann}}{=} c \cdot \int_0^2 \int_x^2 xy\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = c \cdot \int_0^2 x \cdot \left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^2 \mathrm{d}x = c \cdot \int_0^2 2x - \frac{1}{2}x^3\ \mathrm{d}x \\
&= c \cdot \left[x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^2 = c \cdot (2-0) = 2c.
\end{aligned}$$

Es muss also $c = \frac{1}{2}$ sein.

(b) Für die Berechnung der Randdichten muss die jeweils andere Variable herausintegriert werden. Wichtig ist hier, die Indikatorfunktionen nicht zu vergessen!

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}\lambda(y) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot \underbrace{\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y \leq 2\}}}_{=\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}} \cdot \mathbb{I}_{\{x \leq y \leq 2\}}}\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}} \cdot x \cdot \int_x^2 y\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq 2\}} \cdot x \cdot (2 - \frac{1}{2}x^2), \\
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot \underbrace{\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y \leq 2\}}}_{=\mathbb{I}_{\{0 \leq y \leq 2\}} \cdot \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y\}}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{0 \leq y \leq 2\}} \cdot y \cdot \int_0^y x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{I}_{\{0 \leq y \leq 2\}} \cdot y^3.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(2X \geq Y) \\
=\ &\int_{\{(x,y):2x \geq y\}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \frac{1}{2}\int_{\{(x,y):2x \geq y\}} xy\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y \leq 2\}}\ \mathrm{d}\lambda^2(x,y) \\
\overset{\text{Fubini, alles} \geq 0}{=}\ &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y \leq 2, 2x \geq y\}}\ \mathrm{d}\lambda(x)\ \mathrm{d}\lambda(y) \\
\overset{\text{Lebesg.} = \text{Riemann}}{=}\ &\int \frac{1}{2}\int_0^2 y \cdot \int_{\frac{y}{2}}^y x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^2 y \cdot (y^2 - \frac{1}{4}y^2)\ \mathrm{d}y = \frac{3}{16}\int_0^2 y^3\ \mathrm{d}y = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \cdot Y] &= \int_{\mathbb{R}^2} xyf_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}\lambda^2(x,y) \overset{\text{wie in (c), alles} \geq 0}{=} \frac{1}{2}x^2 \int_0^2 \int_x^2 y^2\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 x^2 \cdot (8 - x^3)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^2 = \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

(e) X, Y sind nicht stochastisch unabhängig, da nicht $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ überall außer auf einer λ^2-Nullmenge gilt. So gilt zum Beispiel für $A := \{(x,y) \in [0,2]^2 : x > y\}$:

$\lambda^2(A) = \int_A \, \mathrm{d}\lambda^2 = 2 \neq 0$, und für $(x,y) \in A$:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0 \neq \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{0\leq x\leq 2\}} \cdot x \cdot (2 - \frac{1}{2}x^2) \cdot \frac{1}{4}\mathbb{I}_{\{0\leq y\leq 2\}} \cdot y^3 = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

$\overset{\text{VL 2.6}}{\Rightarrow}$ X, Y nicht unabhängig.
Alternativ mit Def. :

$$\mathbb{P}(X \in [1,2], Y \in [0,1]) = 0 \neq \mathbb{P}(X \in [1,2]) \cdot \mathbb{P}(Y \in [0,1]),$$

denn

$$\mathbb{P}(X \in [1,2], Y \in [0,1]) \leq \mathbb{P}(X \geq Y) = 0,$$

aber

$$\mathbb{P}(X \in [1,2]) = \int_1^2 f_X(x) \, \mathrm{d}x \neq 0, \quad \mathbb{P}(Y \in [0,1]) = \int_0^1 f_Y(y) \, \mathrm{d}y \neq 0.$$

$\overset{\text{Def. 2.1}}{\Rightarrow}$ X, Y nicht unabhängig.

Lösung 47.

Lösung: Da alle auftretenden Terme nichtnegativ sind, ist der Satz von Fubini im Folgenden immer anwendbar.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int x \, \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) \overset{X\geq 0}{=} \int_{(0,\infty)} \left(\int_0^x 1 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) \\
&= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty)} \mathbb{I}_{\{y<x\}} \, \mathrm{d}\lambda(y) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty)} \mathbb{I}_{\{y<x\}} \, \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) \, \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{(0,\infty)} \int_{(y,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) \, \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{(0,\infty)} (1 - F(y)) \, \mathrm{d}\lambda(y).
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung aus der Aufgabe ergibt sich aus $1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$ und

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int \underbrace{X^+}_{\max\{X,0\}} \mathrm{d}\mathbb{P} - \int \underbrace{X^-}_{\max\{-X,0\}} \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{(0,\infty)} x \, \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) - \int_{(-\infty,0]} (-x) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x) =: I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Nun ist wie in (a):

$$I_1 = \int_{(0,\infty)} (1 - F(y)) \, \mathrm{d}\lambda(y)$$

Für I_2 wiederholen wir die Schritte aus (a) weitestgehend analog:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{(-\infty,0]} \left(\int_x^0 1 \text{ d}y\right) \text{ d}\mathbb{P}^X(x) = \int_{(-\infty,0]} \int_{(-\infty,0]} \mathbb{I}_{\{x\leq y\}} \text{ d}\lambda(y) \text{ d}\mathbb{P}^X(x) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(-\infty,0]} \int_{(-\infty,0]} \mathbb{I}_{\{x\leq y\}} \text{ d}\mathbb{P}^X(x) \text{ d}\lambda(y) \\
&= \int_{(-\infty,0]} \int_{(-\infty,y]} \text{d}\mathbb{P}^X(x) \text{ d}\lambda(y) \\
&= \int_{(-\infty,0]} F(y) \text{ d}\lambda(y)
\end{aligned}$$

Lösung 48.

Lösung: Sei μ_Z das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta \cdot |M_\delta| &= \delta \cdot \int \mathbb{I}_{M_\delta}(z) d\mu_Z(z) \\
&= \int_{M_\delta} \delta d\mu_Z(z) \\
&= \int_{M_\delta} \lambda([\delta z, \delta(z+1)) d\mu_Z(z) \\
&= \int_{M_\delta} \int \mathbb{I}_{[\delta z, \delta(z+1))}(y) d\lambda(y) d\mu_Z(z) \\
&\overset{\text{Fubini, Integrand } \geq 0}{=} \int \int_{M_\delta} \mathbb{I}_{[\delta z, \delta(z+1))}(y) d\mu_Z(z) d\lambda(y) \\
&\overset{[\delta z, \delta(z+1)), z\in\mathbb{Z} \text{ disj.}}{=} \int \mathbb{I}_{\bigcup_{z\in M_\delta}[\delta z, \delta(z+1))}(y) d\lambda(y) \\
&= \lambda\Big(\bigcup_{z\in M_\delta} [\delta z, \delta(z+1))\Big) \\
&= \lambda(N_\delta),
\end{aligned}$$

wobei

$$N_\delta := \bigcup_{z\in M_\delta} \big[\delta z, \delta(z+1)\big).$$

Es gilt offensichtlich $M \subset N_\delta$, denn: Ist $x \in M$, so gibt es $z \in \mathbb{Z}$ mit $x \in [\delta z, \delta(z+1))$. Für dieses z gilt dann $[\delta z, \delta(z+1)) \cap M \neq \emptyset$, und damit $z \in M_\delta$. Daher $x \in N_\delta$.
Wir zeigen, dass für jede beliebige Folge $\delta_k \to 0$ gilt:

$$\limsup_{k\to\infty}(N_{\delta_k} \backslash M) = \emptyset. \quad (*)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &\overset{M\subset N_\delta}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \lambda(N_{\delta_k}) - \lambda(M) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \lambda(N_{\delta_k}) - \lambda(M) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \lambda(N_{\delta_k} \backslash M) \overset{K \text{ komp., also } \lambda(N_{\delta_1})<\infty}{\leq} \lambda(\limsup_{k\to\infty}(N_{\delta_k} \backslash M)) = \lambda(\emptyset) = 0.
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k \cdot |M_{\delta_k}| = \lim_{k\to\infty} \lambda(N_{\delta_k}) = \lambda(M).$$

Beweis von (*): Angenommen, $x \in \limsup_{k\to\infty}(N_{\delta_k}\backslash M)$. Dann ist $x \notin M$.
M kompakt $\Rightarrow M^c$ offen $\Rightarrow$ Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset M^c$. Sei $K \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\delta_k < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq K$. Wäre nun

$$x \in N_{\delta_k},$$

so gäbe es $z \in \mathbb{Z}$ mit $[z\delta_k, (z+1)\delta_k) \cap M \neq \emptyset$ und $x \in [z\delta_k, (z+1)\delta_k)$. Ein $a \in [z\delta_k, (z+1)\delta_k) \cap M$ erfüllt aber $|x-a| \leq \delta_k < \frac{\varepsilon}{2}$ und da $a \in M$ auch $|x-a| \geq \varepsilon$, Widerspruch.
Also ist

$$x \notin N_{\delta_k}.$$

Damit ist aber $x \in \limsup_{k\to\infty}(N_{\delta_k}\backslash M)$ nicht möglich.

Lösung 49.

Lösung:

(a) X, Y unabhängig $\Rightarrow \mathbb{P}^{(X,Y)} = \mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F_{XY}(z) &= \mathbb{P}(XY \leq z) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy \leq z\}} \mathrm{d}\mathbb{P}^{(X,Y)}(x,y) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{(-\infty, \frac{z}{y}]} \mathrm{d}\mathbb{P}^X(x)\ \mathrm{d}\mathbb{P}^Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(\frac{z}{y})\ \mathrm{d}F_Y(y). \end{aligned}$$

(b) Bonus maßtheoretische Induktion nach h:

(1) $h = \mathbb{I}_A$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: Dann gilt für alle $y > 0$:

$$\begin{aligned} \int h\ \mathrm{d}\lambda &= \int \mathbb{I}_A\ \mathrm{d}\lambda = \lambda(A) = \frac{1}{y}\lambda(yA) = \int \frac{1}{y}\mathbb{I}_{Ay}(x)\ \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int \frac{1}{y}\mathbb{I}_A(\frac{x}{y})\ \mathrm{d}\lambda(x) = \int \frac{1}{y}h(\frac{x}{y})\ \mathrm{d}\lambda(x). \end{aligned}$$

(2) $h = \sum_{j=1}^k y_j \mathbb{I}_{A_j}$ primitive Funktion. Dann gilt für alle $y > 0$:

$$\begin{aligned} \int h\ \mathrm{d}\lambda &\overset{\text{Def. Maßint.}}{=} \sum_{j=1}^k y_j \int \mathbb{I}_{A_j}\ \mathrm{d}\lambda \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^k y_j \int \frac{1}{y}\mathbb{I}_{A_j}(\frac{x}{y})\ \mathrm{d}\lambda(x) \\ &\overset{\text{Lin. Maßint.}}{=} \int \frac{1}{y}\sum_{j=1}^k y_j \mathbb{I}_{A_j}(\frac{x}{y})\ \mathrm{d}\lambda(x) = \int \frac{1}{y}h(\frac{x}{y})\ \mathrm{d}\lambda(x). \end{aligned}$$

(3) $h \geq 0$ nichtnegativ messbar numerisch $\Rightarrow$ Es gibt Folge $h_n \geq 0$ primitiver Funktionen mit $h_n \uparrow h$.
$\Rightarrow g_n(x) := \frac{1}{y}h_n(\frac{x}{y})$, $g(x) := h(\frac{x}{y})$ erfüllen $0 \leq g_n \uparrow g$ (damit mon. Konv. anwendbar).
Dann gilt $\mathbb{P}^Y$-f.s.:

$$\int h\ \mathrm{d}\lambda \overset{\text{Def. Maßint}}{=} \lim_{n\to\infty} \int h_n\ \mathrm{d}\lambda \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{y}h_n(\frac{x}{y})\ \mathrm{d}\lambda(x) \overset{\text{mon. Konv.}}{=} \int \frac{1}{y}h(\frac{x}{y})\ \mathrm{d}\lambda(x).$$

(c) Wir zeigen für das $\cap$-stabile Erzeugendensystem $\mathcal{E} = \{(-\infty, z] : z \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{B}_\mathbb{R}$:

$$\forall E \in \mathcal{E}: \quad \mathbb{P}^{X\cdot Y}(E) = \int_E \int_\mathbb{R} \frac{1}{y} f_X(\frac{x}{y}) \, \mathrm{d}F_Y(y) \, \mathrm{d}\lambda(x) \qquad (*)$$

Maßerweiterungssatz (linke, rechte Seite Maße) $\Rightarrow$ (*) gilt für alle $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R} \overset{\text{Radon-Nikodym Eind. Dichte}}{\Rightarrow}$ $\frac{d\mathbb{P}^{X\cdot Y}}{d\lambda} = \int_\mathbb{R} \frac{1}{y} f_X(\frac{x}{y}) \, \mathrm{d}F_Y(y)$.

Wir zeigen nun (*): Sei $z \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_X(\frac{z}{y}) &= \int_{(-\infty, \frac{z}{y}]} f_X(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int f_X(x) \mathbb{I}_{(-\infty, \frac{z}{y}]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \\ &\overset{(b)}{=} \int \frac{1}{y} f_X(\frac{x}{y}) \mathbb{I}_{(-\infty, \frac{z}{y}]}(\frac{x}{y}) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{(-\infty, z]} \frac{1}{y} f_X(\frac{x}{y}) \, \mathrm{d}\lambda(x). \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{X\cdot Y}\big((-\infty, z]\big) &= F_{X\cdot Y}(z) \overset{(a)}{=} \int_\mathbb{R} F_X(\frac{z}{y}) \, \mathrm{d}F_Y(y) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \int_\mathbb{R} \int_{(-\infty, z]} \frac{1}{y} f_X(\frac{x}{y}) \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}F_Y(y) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(-\infty, z]} \int_\mathbb{R} \frac{1}{y} f_X(\frac{x}{y}) \, \mathrm{d}F_Y(y) \, \mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

Lösung 50.
Lösung:

(a) (i) Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= X^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R}) \overset{Bild(X)=\{1,2\}}{=} X^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R}\big|_{\{1,2\}}) = X^{-1}(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}) \\ &= \{\emptyset, \{a,d\}, \{b,c\}, \Omega\}, \\ \sigma(Y) &= Y^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R}) \overset{Bild(Y)=\{2,3\}}{=} Y^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R}\big|_{\{2,3\}}) = Y^{-1}(\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}) \\ &= \{\emptyset, \{a,d\}, \{b,c\}, \Omega\}, \\ \sigma(Z) &= Z^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R}) \overset{Bild(Z)=\{1,2\}}{=} Z^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R}\big|_{\{1,2\}}) = Z^{-1}(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}) \\ &= \{\emptyset, \{a,c\}, \{b,d\}, \Omega\}. \end{aligned}$$

(ii) Informell: X, Y können nicht unabhängig sein, da $\sigma(X) = \sigma(Y)$.
Formal:

- Möglichkeit 1 (Definition Unabhängigkeit über erzeugte σ-Algebren): Wähle $A_1 = \{a,d\} \in \sigma(X)$ und das gleiche $A_2 = A \in \sigma(Y)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

- Möglichkeit 2 (über Urbilder): Es gilt

$$\mathbb{P}(X=1, Y=3) = \mathbb{P}(\emptyset) \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{a,d\}) \cdot \mathbb{P}(\{b,c\}) = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=3).$$

Wichtige Anschauung: Es spielt keine Rolle, welche konkreten Werte X, Y annehmen, sondern nur, *wo* (auf welchen ω) sie diese annehmen und mit welchen Wahrscheinlichkeiten. Daher genügt es auch, Unabhängigkeit über die erzeugten σ-Algebren zu definieren, die genau 'abspeichern', auf welchen Elementarereignissen ω X verschiedene Werte annimmt. Ist zum Beispiel $X(\omega) = 2$, so weiß man bereits, dass $\omega \in \{b, c\}$ liegt. Dadurch ist der Wert von $Y(\omega)$ hier aber schon eindeutig bestimmt durch $Y(\omega) = 3$. Auch wenn $Y(\omega)$ nicht eindeutig bestimmt wäre, muss Y noch lange nicht unabhängig von X sein - solange sich durch Kenntnis des Wertes von X die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Werte von Y ändern, sind diese abhängig.

Y, Z sind unabhängig:
Update: Es genügt, nur jeweils EINE der unten stehenden Gleichheiten nachzurechnen, da bereits $\mathcal{E}_Y = \{\{a, d\}\}$ und $\mathcal{E}_Z = \{\{a, c\}\}$ $\cap$-stabile Erzeugendensysteme sind!

- Möglichkeit 1: Nachprüfen auf $\cap$-stabilen Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_Y = \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$, $\mathcal{E}_Z = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ von $\sigma(Y), \sigma(Z)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{a, d\} \cap \{a, c\}) &= \mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{a, d\}) \cdot \mathbb{P}(\{a, c\}), \\
\mathbb{P}(\{a, d\} \cap \{b, d\}) &= \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{a, d\}) \cdot \mathbb{P}(\{b, d\}), \\
\mathbb{P}(\{b, c\} \cap \{a, c\}) &= \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{b, c\}) \cdot \mathbb{P}(\{a, c\}), \\
\mathbb{P}(\{b, c\} \cap \{b, d\}) &= \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{b, c\}) \cdot \mathbb{P}(\{b, d\}).
\end{aligned}$$

  $\overset{\text{VL 2.4}}{\Rightarrow}$ $\sigma(Y)$, $\sigma(Z)$ unabhängig $\Rightarrow Y, Z$ unabhängig.

- Möglichkeit 2: Nachprüfen auf $\cap$-stabilen Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_Y = \{\{2\}, \{3\}\}$ bzw. $\mathcal{E}_Z = \{\{1\}, \{2\}\}$ von $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{2,3\}}$ bzw. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\big|_{\{1,2\}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 2, Z = 1) &= \mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y = 2)\mathbb{P}(Z = 1), \\
\mathbb{P}(Y = 2, Z = 2) &= \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y = 2)\mathbb{P}(Z = 2), \\
\mathbb{P}(Y = 3, Z = 1) &= \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y = 3)\mathbb{P}(Z = 1), \\
\mathbb{P}(Y = 3, Z = 2) &= \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y = 3)\mathbb{P}(Z = 2).
\end{aligned}$$

  $\overset{\text{VL 2.4}}{\Rightarrow}$ Y, Z unabhängig.

X, Z sind unabhängig, da $\sigma(X) = \sigma(Y)$ und Y, Z unabhängig.

(iii) X, Y, Z sind nicht gemeinsam unabhängig.
Angenommen, X, Y, Z sind gemeinsam unabhängig $\overset{\text{Def. oder Prop. 2.7}}{\Rightarrow}$ X, Y unabhängig, Widerspruch.

(b) (i) $Y_1 = \max\{X_1, X_2\}$, $Y_2 := \mathbb{I}_{\{X_3 \leq 2\}}$ sind Funktionen von unterschiedlichen X_i
X_1, X_2, X_3 gemeinsam unabhängig $\overset{\text{VL 2.7}}{\Rightarrow}$ Y_1, Y_2 unabhängig.

(ii) Wähle $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wie in (a).
Wähle $X_1 = X$, $X_2 = Z$.
(a) $\Rightarrow X, Z$ unabhängig.
Außerdem (Wertetafel):

ω	a	b	c	d
$X_1(\omega)$	1	2	2	1
$X_2(\omega)$	1	2	1	2
$X_1+X_2(\omega)$	2	4	3	3
$X_1-X_2(\omega)$	0	0	1	-1

Nun gilt

$$\mathbb{P}(X_1+X_2=2, X_1-X_2=0)=\mathbb{P}(\{a\})=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}(X_1+X_2=2)\cdot\mathbb{P}(X_1-X_2=0)$$

Lösung 51.

Lösung:

(a) Es gilt für jedes $\omega\in(0,1)$:

$$X_n(\omega)=\sqrt{n}\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n})}(\omega)\overset{n>\frac{1}{\omega}}{=}0\to 0.$$

$\mathbb{P}((0,1))=1\Rightarrow X_n\to 0$ f.s.
$\Rightarrow X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}0.$

Falls $X_n\xrightarrow{(r)}X$, so folgt $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X\overset{\text{stoch. Limes eindeutig, P26}}{\Rightarrow}X=0$ f.s.

Sei $r\geq 1$. Dann:

$$\mathbb{E}[|X_n-0|^r]=n^{\frac{r}{2}}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n})}]=n^{\frac{r}{2}}\lambda\Big([0,\frac{1}{n})\Big)=n^{\frac{r}{2}-1}\to 0\Leftrightarrow r<2.$$

Das bedeutet $X_n\xrightarrow{(r)}0\Leftrightarrow r<2$.

(b) Angenommen, $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$. Dann gilt auch

$$X_2=X_{2n}\xrightarrow{\mathbb{P}}X,\quad -X_2=X_{2n+1}\xrightarrow{\mathbb{P}}X$$

Andererseits ist (konstante Folgen)

$$X_2\xrightarrow{\mathbb{P}}X_2,\qquad -X_2\xrightarrow{\mathbb{P}}-X_2.$$

Eindeutigkeit stochastischer Limes P26 $\Rightarrow$

$$X_2=X=-X_2\quad f.s.$$

$\Rightarrow 2X_2=0$ f.s.
Widerspruch, denn für alle $\omega\in[0,\frac{1}{2})$ ist $X_2(\omega)=1$ und $\lambda([0,\frac{1}{2}))=\frac{1}{2}\neq 0$.

(c) Vermutung: Grenzwert $X=0$.

- Sei $\varepsilon>0$. Dann

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n-0|\geq\varepsilon) &\leq \mathbb{P}(n\cdot W_{m(n),k(n)}\geq\varepsilon)\\ &= \mathbb{P}(n\cdot\mathbb{I}_{[\frac{k(n)}{2^{m(n)}},\frac{k(n)+1}{2^{m(n)}})}\geq\varepsilon)\\ &\leq \mathbb{P}\big([\frac{k(n)}{2^{m(n)}},\frac{k(n)+1}{2^{m(n)}})\big)=\frac{1}{2^{m(n)}}=\frac{1}{2^{\lfloor\log_2(n)\rfloor}}\to 0,\end{aligned}$$

d.h. $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}0$.

- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Rightarrow$ Falls $X_n \xrightarrow{(r)} ...$, dann muss $X_n \xrightarrow{(r)} 0$ gelten.
  Weiter ist

  $$\mathbb{E}[|X_n - 0|^r] = n^r \cdot \mathbb{E}[\mathbb{I}_{[\frac{k(n)}{2^{m(n)}}, \frac{k(n)+1}{2^{m(n)}})}] = n^r \cdot \mathbb{P}\big([\frac{k(n)}{2^{m(n)}}, \frac{k(n)+1}{2^{m(n)}})\big) = n^r \frac{1}{2^{m(n)}} \overset{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \leq 2^{\log_2(n)} = n}{\geq} \frac{n^r}{n} \not\to 0$$

  für alle $r \geq 1 \Rightarrow$ Es gilt nicht $X_n \xrightarrow{(r)} 0$.
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Rightarrow$ Falls $X_n \to ...$ f.s., dann muss $X_n \to 0$ f.s. gelten.
  Sei $x \in [0,1) \Rightarrow$ Für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert $k(m) \in \{0, ..., 2^m - 1\}$ mit

  $$x \in [\frac{k(m)}{2^m}, \frac{k(m)+1}{2^m}).$$

  Definiere $n(m) := 2^m + k(m)$. $\Rightarrow$

  $$X_{n(m)}(x) = n(m) \cdot W_{m,k(m)}(x) = n(m) \to \infty \quad (m \to \infty).$$

  D.h. es existiert eine Teilfolge $X_{n(m)}(x)$ von $X_n(x)$, die nicht konvergiert $\Rightarrow X_n(x) \not\to 0$.

  Das heißt, $\mathbb{P}(X_n \not\to 0) = \mathbb{P}([0,1)) = 1 \neq 0$ ('$X_n(x)$ konvergiert für kein x') $\Rightarrow$ Es gilt nicht $X_n \to 0$ f.s.

Lösung 52.
Lösung:

(a) (i) Sei X_{n_k} beliebige Teilfolge von X_n. $\overset{\text{Prop. 3.6}}{\Rightarrow}$ Es gibt Teilfolge $X_{n_{k_l}} \to X$ f.s.

$$\mathbb{E}[|X|^q] = \mathbb{E}[\lim_{l\to\infty} |X_{n_{k_l}}|^q] \overset{\text{Lemma von Fatou, } |X_{n_{k_l}}|^q \geq 0}{\leq} \liminf_{l\to\infty} \mathbb{E}[|X_{n_{k_l}}|^q] \overset{\text{Vorauss.}}{<} \infty.$$

(ii) Es ist (wir wenden die Hölder-Ungleichung an mit $\frac{1}{(\frac{r}{q})} + \frac{1}{(\frac{r}{r-q})} = 1$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[|X_n - X|^r] \\ = \; & \mathbb{E}[|X_n - X|^r \mathbb{I}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] + \mathbb{E}[|X_n - X|^r \mathbb{I}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}] \\ \overset{\text{Hölder, } \frac{1}{(\frac{q}{r})} + \frac{1}{(\frac{q}{q-r})} = 1}{=} \; & \mathbb{E}[|X_n - X|^q]^{r/q} \mathbb{E}[\mathbb{I}^{\frac{q}{q-r}}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}]^{\frac{q-r}{q}} + \mathbb{E}[\underbrace{|X_n - X|^r}_{\leq \varepsilon^r} \underbrace{\mathbb{I}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}}_{\leq 1}] \\ \leq \; & \mathbb{E}[|X_n - X|^q]^{r/q} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)^{\frac{q-r}{q}} + \varepsilon^r. \end{aligned}$$

(iii) Hinweis $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^q] \leq 2^q (\mathbb{E}[|X_n|^q] + \mathbb{E}[|X|^q]).$$

(i), Voraussetzung $\Rightarrow$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^q] \leq 2^q (\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^q] + \mathbb{E}[|X|^q]) < \infty.$$

(ii) $\Rightarrow$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] \leq \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^q]^{r/q}}_{<\infty} \cdot \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)^{\frac{q-r}{q}}}_{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \atop = 0} + \varepsilon^r = \varepsilon^r.$$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] \le 0,$$

d.h. $X_n \overset{(r)}{\to} X$.

(b) Es gilt $X_n \to 0 =: X$ $\mathbb{P}$-f.s., denn für alle $x \in (0,1)$ ist

$$X_n(x) = n^{1/q}\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n})}(x) \overset{n>\frac{1}{x}}{=} 0 \to 0 = X(x),$$

und $\lambda(\{0\}) = 0$.
Außerdem ist

$$\mathbb{E}[|X_n|^q] = \mathbb{E}[n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n})}] = n \cdot \lambda([0, \frac{1}{n})) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^q] = 1 < \infty.$$

Aber

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^q] = \mathbb{E}[|X_n|^q] \overset{\text{s.o.}}{=} 1 \not\to 0,$$

d.h. $X_n \overset{(q)}{\to} X$ gilt nicht.

Lösung 53.

Lösung: Es sei S die Menge der Zeichen auf der Schreibmaschine, $F := (f_i)_{i\in\{1,...,N\}} \subset S^N$ Goethes Faust und entsprechend $N \in \mathbb{N}$ die Länge des Texts von Goethes Faust.
Modellierungsidee: Wir wollen die Zeichenfolge, die der Affe tippt, als Folge von messbaren Abbildungen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definieren. Das i-te Zeichen der Zeichenfolge wird also durch $X_i \in S$ angegeben.
Da der Affe rein zufällig tippt, hat der konkrete Wert eines zuvor getippten Zeichens keine Auswirkungen auf das nächste getippte Zeichen, daher sind die X_i unabhängig. Außerdem haben alle X_i dieselbe Verteilung, jedes X_i nimmt alle Werte aus S mit gleicher Wahrscheinlichkeit an.
Formalisierung der Modellierung: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf welchem wir eine Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten messbaren Abbildungen $X_i : \Omega \to S$ mit induzierten Verteilungen

$$\forall s \in S : \mathbb{P}(X_i = s) = \frac{1}{|S|}.$$

definieren. Wir unterteilen nun die Zeichenfolge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in Blöcke der Länge N: Wir definieren den i-ten Block durch

$$Y_i := (X_{(i-1)\cdot N+1}, ..., X_{i\cdot N}) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig, Y_i hängen von verschiedenen X_i ab $\overset{\text{VL 2.7}}{\Rightarrow}$ $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig

$\Rightarrow$

$$A_i := \{Y_i = F\} \in \mathcal{A} \quad \text{Im } i\text{-ten Block steht Faust} \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

sind stochastisch unabhängig, und

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbb{N} : \quad \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P}(Y_i = F) = \mathbb{P}(X_{(i-1)\cdot N+1} = f_1, ..., X_{i\cdot N} = f_N) \\
&\overset{X_i \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(X_{(i-1)\cdot N+1} = f_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_{i\cdot N} = f_N) \\
&= \left(\frac{1}{|S|}\right)^N > 0.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{|S|^N} = \infty$

$\overset{\text{Borel-Cantelli 3.4(ii)}}{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \quad \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = F \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

D.h. $\mathbb{P}$-f.s. tritt $Y_n = F$ unendlich oft ein, d.h. $\mathbb{P}$-f.s. schreibt der Affe Faust unendlich oft.

Lösung 54.

Lösung:

(a) (i) Sei $\omega \in \Omega$. Dann ist wegen $\log(n) \to \infty$:

$$\frac{X_1(\omega)}{\log(n)} \to 0.$$

$\Rightarrow \frac{X_1}{\log(n)} \to 0$ (sogar ohne f.s.).

(ii) Für $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq \log(n)\varepsilon) = \int_{\varepsilon \log(n)}^{\infty} e^{-x} dx = \exp(-\log(n)\varepsilon) = n^{-\varepsilon} \to 0.$$

$\Rightarrow Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$

Achtung: Wesentlicher Unterschied zu (i) ist, dass $X_n(\omega)$ nun auch von n abhängt! Daher kann nicht wie in (i) für die f.s. Konvergenz argumentiert werden.

(iii) X_n stoch. unabh. $\Rightarrow$ Y_n stoch. unabh. $\Rightarrow$ $A_n := \{Y_n \geq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ sind stochastisch unabhängig.

Außerdem

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1) = \mathbb{P}(X_n \geq \log(n)) \overset{\text{Rechnung wie in (i) mit } \varepsilon = 1}{=} \frac{1}{n}.$$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$

$\overset{\text{Borel-Cantelli 3.4(ii)}}{\Rightarrow} \quad 1 = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}).$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} Y_n \geq 1$ f.s.

Angenommen, $Y_n \to 0$ f.s. $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} Y_n = 0$ f.s., Widerspruch!

(iv) Sei $\varepsilon > 0$. Definiere $A_n(\varepsilon) := \{Y_n \geq 1 + \varepsilon\}$.

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1+\varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq (1+\varepsilon)\log(n)) \overset{\text{Rechnung wie in (i) mit '}\varepsilon = 1+\varepsilon\text{'}}{=} n^{-(1+\varepsilon)}.$$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) < \infty$

$\overset{\text{Borel-Cantelli 3.4(i)}}{\Rightarrow}$ $0 = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1+\varepsilon \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N})$.

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} Y_n \leq 1+\varepsilon$ f.s.

$\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k \to \infty \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} Y_n \leq 1$ f.s.

$\overset{(iii): \limsup_{n\to\infty} Y_n \geq 1 \quad f.s.}{\Rightarrow}$ $\limsup_{n\to\infty} Y_n = 1$ f.s.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\min\{|X_1|,...,|X_n|\} - 0| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(\min\{|X_1|,...,|X_n|\} > \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon, ..., |X_n| > \varepsilon) \overset{X_i \text{ i.i.d.}}{=} \mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon)^n. \end{aligned}$$

Voraussetzung $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_1| > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) =: a < 1.$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\min\{|X_1|,...,|X_n|\} - 0| > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^n \leq \frac{1}{1-a} < \infty.$$

$\overset{\text{Bemerkung 3.2}}{\Rightarrow}$ $\min\{|X_1|,...,|X_n|\} \to 0$ f.s.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Dann:

$$\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n} - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon n) \overset{\text{Markov-Ungl.}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{(\varepsilon n)^2} = \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{\varepsilon^2 n^2}.$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\frac{X_n}{n} - 0| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.
$\overset{\text{Bem. 3.2}}{\Rightarrow}$ $\frac{X_n}{n} \to 0$ f.s.

(d) Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \overset{X_n \in \{0,1\}}{\leq} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \to 0.$$

$\Rightarrow X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$.

$X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0 \Rightarrow$ Falls $X_n \to ...$ f.s., so muss $X_n \to 0$ f.s. gelten.
Definiere $A_n := \{X_n = 1\}$.
X_n, $n \in \mathbb{N}$ unabhängig $\Rightarrow A_n$, $n \in \mathbb{N}$ unabhängig.

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

$\overset{\text{Borel-Cantelli, 3.4(ii)}}{\Rightarrow}$ $1 = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(X_n = 1 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} X_n \ \geq 1$ f.s.

Widerspruch zu $X_n \to 0$ f.s.

Lösung 55.

Lösung:

(a) Es gilt für jedes $\omega \in (0,1)$:
$$X_n(\omega) = \exp(-n\omega) \to 0.$$
Außerdem $\lambda(\{0\}) = 0 \Rightarrow X_n \to 0$ f.s.

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$

Sei $r \geq 1$ beliebig.
Falls $X_n \xrightarrow{(r)} X$, so folgt $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \overset{\text{stoch. Limes eindeutig, P26}}{\Rightarrow} X = 0$ f.s.

Es ist
$$\mathbb{E}[|X_n - 0|^r] = \mathbb{E}[X_n^r] = \int_0^1 \exp(-nrx)dx = \frac{1}{nr}(1 - \exp(-nr)) \to 0.$$
(Alternativ: Majorisierte Konvergenz, $|X_n| \leq 1$).

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{(r)} 0.$

(b) Angenommen, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Dann gilt auch
$$X_2 = X_{2n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X, \quad -X_2 = X_{2n+1} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$
Andererseits ist (konstante Folgen)
$$X_2 \xrightarrow{\mathbb{P}} X_2, \quad -X_2 \xrightarrow{\mathbb{P}} -X_2.$$
Eindeutigkeit stochastischer Limes P26 $\Rightarrow$
$$X_2 = X = -X_2 \quad f.s.$$
$\Rightarrow 2X_2 = 0$ f.s.
Widerspruch, denn $X_2(\omega) \neq 0$ für $\omega \neq \frac{1}{2}$.

(c) Es gilt für jedes $\omega \in [0,1)$:
$$X_n(\omega) = n^{\frac{1}{3}} \mathbb{I}_{[\frac{n-1}{n},1)}(\omega) \overset{n > \frac{1}{1-\omega}}{=} 0 \to 0.$$
Damit ist $X_n \to 0$ (sogar ohne f.s.)
$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$

Falls $X_n \xrightarrow{(r)} X$, so folgt $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \overset{\text{stoch. Limes eindeutig, P26}}{\Rightarrow} X = 0$ f.s.

Sei $r \geq 1$. Dann:
$$\mathbb{E}[|X_n - 0|^r] = n^{\frac{r}{3}} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{[\frac{n-1}{n},1)}] = n^{\frac{r}{3}} \lambda\Big([\frac{n-1}{n}, 1)\Big) = n^{\frac{r}{3}-1} \to 0 \Leftrightarrow r < 3.$$
Das bedeutet $X_n \xrightarrow{(r)} 0 \Leftrightarrow r < 3.$

Lösung 56.

Lösung:

(a) Es gelte $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$, $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} Y$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\mathbb{P}(|X-Y| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X-X_n|+|X_n-Y| \geq \varepsilon) \overset{(*)}{\leq} \mathbb{P}(|X_n-X| \geq \frac{\varepsilon}{2})+\mathbb{P}(|Y_n-Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(|X-Y| \neq 0) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{|X-Y| > \frac{1}{k}\}\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{P}(|X-Y| > \frac{1}{k})}_{=0} = 0.$$

$\Rightarrow X = Y$ f.s.

(*) gilt wegen der Regel

$$\mathbb{P}(a+b \geq c+d) = \mathbb{P}(a \geq c \text{ oder } b \geq d) \leq \mathbb{P}(a \geq c) + \mathbb{P}(b \geq d).$$

(b) Sei $X_n \to Y$ f.s. $\Rightarrow X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} Y \overset{(a), X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X}{\Rightarrow} X = Y \Rightarrow X_n \to X$ f.s.
Kennt man also den Limes der schwächeren stochastischen Konvergenz, so gibt es auch für die stärkere f.s. Konvergenz keine andere Möglichkeit als diesen Limes (analog für Konv. im r-ten Mittel)!

(c) Es gelte $X_n \overset{(r)}{\to} X$, $X_n \overset{(r)}{\to} Y$. Es ist mit $|a+b|^r \leq 2^r(|a|^r + |b|^r)$ für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[|X-Y|^r] \leq \mathbb{E}[(|X-X_n|+|X_n-Y|)^r] \leq 2^r(\mathbb{E}[|X-X_n|^r]+\mathbb{E}[|X_n-Y|^r]) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$$|X-Y|^r \geq 0 \overset{1.45(ii)}{\Rightarrow} |X-Y|^r = 0 \text{ f.s.} \Rightarrow X = Y \text{ f.s.}$$

(d)

$$\sup_{i\geq n} |X_i - 0| \overset{X_i \geq 0}{=} \sup_{i\geq n} X_i \overset{X_n\downarrow}{=} X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0.$$

Proposition 3.1 $\Rightarrow X_n \to 0$ f.s.

(e) Es ist $Y_n := \frac{\min\{|X_1|,\dots,|X_n|\}}{n} \downarrow$. Außerdem

$$\mathbb{E}|Y_n - 0| \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n|]}{n} \overset{X_n \text{ ident. vert.}}{=} \frac{\mathbb{E}|X_1|}{n} \overset{\mathbb{E}|X_1|<\infty}{\to} 0.$$

$\Rightarrow Y_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$.
(d) $\Rightarrow Y_n \to 0$ f.s.

Lösung 57.

Lösung: Es sei $S = \{1, 2, 3\}$ die Menge der möglichen Farben der Körner ($1 =$ rot, $2 =$ blau, $3 =$ gelb), $F := (3, 3, 3, 3, 3) \subset S^5$ das 5-Tupel, dass 5-mal hintereinander 'gelb' beinhaltet.
Modellierungsidee: Wir wollen die Folge der Farbe der Körner, die das Huhn frisst, als Folge von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definieren. Die Farbe des i-ten gepickten Korns wird also durch $X_i \in S$ angegeben.
Da das Huhn rein zufällig pickt, hat die Farbe eines zuvor gefressenen Korns keine Auswirkungen auf das nächste gefressene Korn, daher müssen die X_i unabhängig sein. Außerdem haben alle X_i dieselbe Verteilung, jedes X_i nimmt alle Werte aus S mit gleicher Wahrscheinlichkeit an.
Formalisierung der Modellierung: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf welchem

wir eine Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $X_i:\Omega\to S$ mit induzierten Verteilungen

$$\mathbb{P}(X_i=1)=\frac{1}{2},\qquad \mathbb{P}(X_i=2)=\frac{1}{3},\qquad \mathbb{P}(X_i=3)=\frac{1}{6}.$$

definieren können. Wir unterteilen nun die Zeichenfolge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in Blöcke der Länge 5: Wir definieren den i-ten Block durch

$$Y_i:=(X_{(i-1)\cdot 5+1},...,X_{i\cdot 5})\quad (i\in\mathbb{N}).$$

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig, Y_i hängen von verschiedenen X_i ab $\overset{\text{VL 2.7}}{\Rightarrow}$ $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig.
$\Rightarrow$

$A_i:=\{Y_i=F\}\in\mathcal{A}$ Im i-ten Block wurden 5 gelbe Körner hintereinander gepickt $\qquad (i\in\mathbb{N}).$

sind stochastisch unabhängig, und

$$\begin{aligned}\forall i\in\mathbb{N}:\quad \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P}(Y_i=F)=\mathbb{P}(X_{(i-1)\cdot 5+1}=3,...,X_{i\cdot 5}=3)\\ &\overset{X_i \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(X_{(i-1)\cdot 5+1}=3)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(X_{i\cdot 5}=3)\\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^5>0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_i)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{6^5}=\infty.$
$\overset{\text{Borel-Cantelli 3.4(ii)}}{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned}1 &= \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}A_n)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega:\omega\in A_n\quad\text{für unendlich viele } n\in\mathbb{N}\})\\ &= \mathbb{P}(Y_n=F \text{ für unendlich viele } n\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

D.h. $\mathbb{P}$-f.s. tritt $Y_n=F$ unendlich oft ein, d.h. $\mathbb{P}$-f.s. frisst das Huhn sogar unendlich oft 5 gelbe Körner hintereinander.

Lösung 58.

Lösung:

(a) (i) Sei $\varepsilon>0$.
$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n}-0|\geq\varepsilon)=\mathbb{P}(|X_n|\geq n\varepsilon)=\mathbb{P}(|X_1|\geq n\varepsilon)\overset{\text{Stetigkeit Maß}}{\to}\mathbb{P}(|X_1|=\infty)=0.$$

(ii) Es gilt

$$\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n}-0|\geq 1)=\mathbb{P}(|X_n|\geq n)=2\int_n^\infty\frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{|x|>1\}}x^{-2}dx=\int_n^\infty x^{-2}dx=\frac{1}{n}.$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n}-0|\geq 1)\geq\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=\infty$
$\overset{\text{Borel-Cantelli 3.4(ii)}}{\Rightarrow}$ $1=\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|\frac{X_n}{n}-0|\geq 1\})=\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n}-0|\geq 1 \text{ für unendlich viele } n\in\mathbb{N})$
$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=1$ f.s.
$\Rightarrow \frac{X_n}{n}\to 0$ f.s. gilt nicht.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|n^{-\frac{3}{\gamma}} \max\{|X_1|, ..., |X_n|\} - 0| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(\max\{|X_1|, ..., |X_n|\} > n^{\frac{3}{\gamma}}\varepsilon) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\max\{|X_1|, ..., |X_n|\} \leq n^{\frac{3}{\gamma}}\varepsilon) \\
&= 1 - \mathbb{P}(|X_1| \leq n^{\frac{3}{\gamma}}\varepsilon, ..., |X_n| \leq n^{\frac{3}{\gamma}}\varepsilon) \\
&\overset{X_i \text{ i.i.d.}}{=} 1 - \mathbb{P}(|X_1| \leq n^{\frac{3}{\gamma}}\varepsilon)^n \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon n^{\frac{3}{\gamma}}))^n \\
&\overset{\text{Markov-Ungl.}}{\leq} 1 - (1 - \frac{\mathbb{E}[|X_1|^\gamma]}{\varepsilon^\gamma n^3}))^n \\
&\overset{\text{Hinweis}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[|X_1|^\gamma]}{\varepsilon^\gamma n^2}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|n^{-\frac{3}{\gamma}} \max\{|X_1|, ..., |X_n|\} - 0| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_1|^\gamma]}{\varepsilon^\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

$\overset{\text{Bemerkung 3.2}}{\Rightarrow} n^{-\frac{3}{\gamma}} \max\{|X_1|, ..., |X_n|\} \to 0$ f.s.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Dann:

$$\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n^2} - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon n^2) \overset{\text{Markov-Ungl.}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[|X_n|]}{\varepsilon n^2} = \frac{\mathbb{E}[|X_1|]}{\varepsilon n^2}.$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\frac{X_n}{n^2} - 0| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_1|]}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$
$\overset{\text{Bem. 3.2}}{\Rightarrow} \frac{X_n}{n^2} \to 0$ f.s.

(d) Sei $x := -\frac{\alpha \log(n)}{\log(p)}$. Definiere $B_n := \{R_n \geq x\} \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(R_n \geq x) = \mathbb{P}(X_n = ... = X_{n+\lceil x \rceil - 1} = 1) \overset{X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Bin(1,p)}{=} p^{\lceil x \rceil} \leq p^x = n^{-\alpha}.$$

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty.$

$\overset{\text{Borel-Cantelli 3.4(i)}}{\Rightarrow} 0 = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} B_n) = \mathbb{P}(R_n \geq x$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N})$.
$\Rightarrow$ f.s. $R_n \leq x = -\frac{\alpha \log(n)}{\log(p)}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log(n)} \leq -\frac{\alpha}{\log(p)}$ f.s.
$\alpha = 1 + \frac{1}{k} \downarrow 1 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log(n)} \leq -\frac{1}{\log(p)}$ f.s.
Wichtig ist, dass der Grenzübergang mit α durch eine abzählbare Folge erfolgt, damit das f.s. erhalten bleibt.

Lösung 59.

Lösung:

(a) $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. $\Rightarrow (\log(X_i))_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. (auf alle X_i wird die gleiche Funktion angewandt).
$\mathbb{E}|\log(X_1)| < \infty$, Starkes GGZ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(X_i) \to \mathbb{E}\log(X_1) \in (-\infty, 0) \quad f.s.$$

Multiplikation mit $n \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \log(X_i) \to -\infty \quad f.s.$$

$\exp(\cdot)$ stetig $\Rightarrow$

$$M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)\Big) \to 0 \quad f.s.$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X_n} + (\overline{X_n})^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X_n}\cdot \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{=\overline{X_n}} + (\overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X_n})^2. \end{aligned}$$

$\mathbb{E}|X_1| \leq \mathbb{E}[X_1^2]^{1/2} < \infty$ und Starkes GGZ $\Rightarrow \overline{X_n} \to \mathbb{E}X_1$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to \mathbb{E}[X_1^2]$ f.s.
$\Rightarrow$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X_n})^2 \to \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = \mathrm{Var}(X_1) \quad f.s.$$

(c) $(X_i), (Y_i)$ unabhängig und (X_i) iid, (Y_i) iid $\Rightarrow (X_i, Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid
$\Rightarrow (\mathbb{I}_A(X_i, Y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. (es wird immer gleiche Funktion auf (X_i, Y_i) angewandt).
$\mathbb{E}|\mathbb{I}_A(X_1, Y_1)| \leq 1$, Starkes GGZ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_A(X_i, Y_i) \to \mathbb{E}\mathbb{I}_A(X_1, Y_1) = \mathbb{P}((X_1, Y_1) \in A) = \int_A d\mathbb{P}^{X_1,Y_1} \overset{(*)}{=} \int_A \mathbb{I}_{[0,1]^2} d\lambda^2 \overset{A\subset[0,1]^2}{=} \lambda^2(A).$$

(*) gilt aufgrund $\frac{d\mathbb{P}^{X_1,Y_1}}{d\lambda^2}(x,y) = \frac{d\mathbb{P}^{X_1}}{d\lambda}(x)\frac{d\mathbb{P}^{Y_1}}{d\lambda}(y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\mathbb{I}_{[0,1]}(y) = \mathbb{I}_{[0,1]^2}(x,y)$.

(d) Seien $X_i \sim U[0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n \text{ Integrale}} \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n \\ \overset{X_i \sim U[0,1]}{=} &\underbrace{\int \dots \int}_{n \text{ Integrale}} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} d\mathbb{P}^{X_1}(x_1)\dots d\mathbb{P}^{X_n}(x_n) \\ \overset{X_i \text{ unabh., Fubini}}{=} &\int \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} d\mathbb{P}^{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{E}\Big[\underbrace{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}}_{=:Y_n}\Big]. \end{aligned}$$

Starkes GGZ, $\mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2} < \infty$, $\mathbb{E}[X_1^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} < \infty \Rightarrow$

$$Y_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \to \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{\mathbb{E}[X_1]} = \frac{2}{3}.$$

$X_i \in [0,1]$ f.s. $\Rightarrow X_i^2 \le X_i$ f.s. $\Rightarrow |Y_n| \le 1$ f.s.
Insbesondere $|Y_n - \frac{2}{3}| \le 2$ f.s. und $\mathbb{E}2 = 2 < \infty$.
Dominierte Konvergenz $\Rightarrow$

$$|\mathbb{E}Y_n - \frac{2}{3}| = \big|\mathbb{E}\big[Y_n - \frac{2}{3}\big]\big| \to 0.$$

$\Rightarrow \mathbb{E}Y_n \to \frac{2}{3}$.

Lösung 60.

Lösung:

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = a_1, ..., X_n = a_n) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega_1 = a_1, ..., \omega_n = a_n\}) \\ &= \lambda([\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}, \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} + 10^{-n})) = \frac{1}{10^n}.\end{aligned}$$

Anschaulich: Alle Zahlen, die mit 0.1234 beginnen, liegen im Intervall $[0.1234, 0.1235) = [0.1234, 0.1234 + 10^{-4})$.

(b)
- Für $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \{0, ..., 9\}$ ist

$$\mathbb{P}(X_k = a_k) = \sum_{a_1,...,a_{k-1}=0}^{9} \mathbb{P}(X_1 = a_1, ..., X_k = a_k) \overset{(a)}{=} \sum_{a_1,...,a_{k-1}=0}^{9} \frac{1}{10^k} = 10^{k-1} \cdot \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10}.$$

  $\Rightarrow X_k$, $k \in \mathbb{N}$ sind identisch verteilt (Gleichverteilung auf $\{0, ..., 9\}$).

- Für $n \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_n \in \{0, ..., 9\}$ ist

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, ..., X_n = a_n) \overset{(a)}{=} \frac{1}{10^n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = a_k).$$

  $\Rightarrow (X_k)_{k=1,...,n}$ unabhängig.

  (Kann weggelassen werden) Jetzt: Formales Nachrechnen der Unabhängigkeitsdefinition.
  Sei $S \subset \mathbb{N}$ endlich. $\Rightarrow$ Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $S \subset \{1, ..., n\}$.
  $(X_k)_{k=1,...,n}$ unabhängig $\Rightarrow$ $(X_k)_{k \in S}$ unabhängig.
  $\Rightarrow$ $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}A &= \{\omega \in \Omega : \forall a \in \{0, ..., 9\} : \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\#\{k \in \{1, ..., n\} : \omega_k = a\}}^{\sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\omega_k = a\}} = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{X_k = a\}}(\omega)}}{n} = \frac{1}{10}\} \\ &= \bigcap_{a=0}^{9} \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_k = a\}}(\omega) = \frac{1}{10}\}.\end{aligned}$$

Sei $a \in \{0, ..., 9\}$ beliebig.

Starkes GGZ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}_{\{X_k=a\}} \to \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X_1=a\}}] = \mathbb{P}(X_1=a) \overset{(b)}{=} \frac{1}{10} \qquad \lambda - f.s.$$

$\Rightarrow$

$$\lambda(A^c) \leq \sum_{a=0}^{9}\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}_{\{X_k=a\}} \neq \frac{1}{10}) = 0$$

$\Rightarrow \lambda(A) = 1-\lambda(A^c) = 1.$

Lösung 61.

Lösung:

(a) Für $k\in\mathbb{N}$ gibt es $n\in\mathbb{N}$ mit $2^{n-1}<k\leq 2^n$.
$\Rightarrow S_k \leq U_n$
$\Rightarrow \frac{S_k}{k} \leq \frac{U_n}{2^{n-1}}$
$\Rightarrow \limsup_{k\to\infty}\frac{S_k}{k} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{U_n}{2^{n-1}}$.

(b) Für $\varepsilon>0$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|\frac{U_n}{2^n}-0|\geq\varepsilon) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(U_n\geq\varepsilon\cdot 2^n)\\
&\overset{\text{Kolmogorov-Ungl.}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[S_{2^n}^2]}{\varepsilon^2 2^{2n}} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{E}[X_k^2]\\
&\overset{\text{Summen vertauschen}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_k^2]\underbrace{\sum_{n:2^n\geq k}\frac{1}{4^n}}_{\leq\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{4^{n_0}}}, \qquad n_0 \text{ kleinstes } n \text{ mit } 2^n\geq k\\
&\overset{\frac{1}{2^{n_0}}\leq\frac{1}{k}}{\leq} \frac{4}{3\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_k^2]\frac{1}{k^2} \overset{\text{Vorauss.}}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.2 $\Rightarrow \frac{U_n}{2^n}\to 0$ f.s.

(c) Es gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{|S_k|}{k} \overset{(a)}{\leq} 2\limsup_{n\to\infty}\frac{U_n}{2^n} \overset{(b)}{=} 0 \quad f.s.$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{S_k}{k}=0$ f.s.

(d) Es gilt $\mathbb{E}X_n = \frac{1}{2n^\alpha}\int_{-n^\alpha}^{n^\alpha}xdx = 0$ und

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \frac{1}{2n^\alpha}\int_{-n^\alpha}^{n^\alpha}x^2dx = \frac{1}{6n^\alpha}\cdot 2(n^\alpha)^3 = \frac{1}{3}n^{2\alpha}.$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{n^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+2\alpha} \overset{\alpha<\frac{1}{2}}{<} \infty.$$

(c) $\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\to 0$ f.s.

Lösung 62.

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$.
Definiere $\theta_j := (\mu - 1) + \varepsilon \cdot (j-1)$, $j = 1, ..., N := \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil + 1$ und

$$l_j(x) = |x - \theta_j| - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad u_j(x) = |x - \theta_j| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}|u_j(X_1) - l_j(X_1)| = \mathbb{E}[\varepsilon] = \varepsilon.$$

Sei $f \in \mathcal{F}$ beliebig, d.h. $f = f_\theta$ mit $\theta \in [\mu - 1, \mu + 1] \Rightarrow \exists j \in \{1, ..., N\} : |\theta - \theta_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (denn θ_j bilden Gitter mit ε-Abstand) $\Rightarrow$

$$f_\theta(x) = |x - \theta| \leq |(x - \theta_j) + (\theta_j - \theta)| \leq |x - \theta_j| + |\theta_j - \theta| \leq |x - \theta_j| + \frac{\varepsilon}{2} = u_j(x),$$

und analog

$$l_j(x) = |x - \theta_j| - \frac{\varepsilon}{2} \leq |(x - \theta) + (\theta - \theta_j)| - \frac{\varepsilon}{2} \leq |x - \theta| + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = f_\theta(x).$$

$\Rightarrow \mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1,...,N} [l_j, u_j]$
Definition $N(\varepsilon, \mathcal{F}) \Rightarrow N(\varepsilon, \mathcal{F}) \leq N \leq \frac{2}{\varepsilon} + 2 < \infty$.
Bessere Abschätzungen von $N(\varepsilon, \mathcal{F})$ sind möglich; die hier angegebene ist aber möglichst einfach.

(b) Es gilt

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E}|f(X_1)| = \sup_{\theta \in [\mu-1, \mu+1]} \mathbb{E}|f_\theta(X_1)| = \sup_{\theta \in [\mu-1, \mu+1]} \mathbb{E}|X_1 - \theta| \leq \mathbb{E}|X_1| + \sup_{\theta \in [\mu-1, \mu+1]} |\theta| < \infty.$$

(a) $\Rightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$: $N(\varepsilon, \mathcal{F}) < \infty$
$\overset{\text{Glivenko-Cantelli 3.14}}{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned} & \sup_{\theta \in [\mu-1, \mu+1]} \big|M_n(\theta) - M(\theta)\big| = \sup_{\theta \in [\mu-1, \mu+1]} \Big|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \theta| - \mathbb{E}|X_1 - \theta|\Big| \\ = \; & \sup_{f \in \mathcal{F}} \Big|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - \mathbb{E} f(X_1)\Big| \to 0 \quad f.s. \end{aligned}$$

(c) $\mathbb{E}|X_1| < \infty \overset{\text{Starkes GGZ 3.9}}{\Rightarrow}$

$$\overline{X_n} \to \mathbb{E}X_1 = \mu \quad f.s. \qquad (*)$$

Insbesondere gilt f.s.: $\overline{X_n} \in [\mu - 1, \mu + 1]$ für n groß genug (**).
Es ist zu zeigen: $M_n(\overline{X_n}) \to M(\mathbb{E}X_1)$ f.s.

Es gilt f.s.

$$\begin{aligned} & |M_n(\overline{X_n}) - M(\mathbb{E}X_1)| \\ \leq \; & |M_n(\overline{X_n}) - M(\overline{X_n})| + \underbrace{|M(\overline{X_n}) - M(\mathbb{E}X_1)|}_{\overset{(***)}{\leq} |\overline{X_n} - \mathbb{E}X_1|} \\ \overset{(**)}{\leq} \; & \sup_{\theta \in [\mu-1, \mu+1]]} \big|M_n(\theta) - M(\theta)\big| + |\overline{X_n} - \mathbb{E}X_1| \\ \overset{(*),(b)}{\to} \; & 0. \end{aligned}$$

(***) gilt, da $||x|-|y|| \leq |x-y| \Rightarrow |M(\theta_1)-M(\theta_2)| \leq \big|\mathbb{E}[|X_1-\theta_1|-|X_1-\theta_2|]\big| \leq \mathbb{E}\big|\,|X_1-\theta_1|-|X_1-\theta_2|\,\big| \leq \mathbb{E}|\theta_1-\theta_2| = |\theta_1-\theta_2|$.

Anmerkungen:

- *Bei (***) genügt auch das einfache Argument, dass $M(\cdot)$ stetig ist (Stetigkeit von Parameterintegralen, vgl. P14).*
- *$M(\overline{X_n})$ ist immer noch zufällig. Man kann nicht einfach $M(\overline{X_n}) = \mathbb{E}|X_1-\overline{X_n}|$ schreiben, da die rechte Seite nicht mehr zufällig ist. Eine korrekte Darstellung wäre $M(\overline{X_n}) = \mathbb{E}[|X_1-\theta|]\big|_{\theta=\overline{X_n}}$ (erst Erwartungswert berechnen, dann $\overline{X_n}$ einsetzen). Die Extra-Definition des Erwartungswerts als Funktion M hilft, diesen Unterschied zu erkennen.*

(d) Es gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{I}_{\{-\hat{\sigma}_n<X_i\leq\hat{\sigma}_n\}}}_{=\mathbb{I}_{\{X_i\leq\hat{\sigma}_n\}}-\mathbb{I}_{\{X_i\leq-\hat{\sigma}_n\}}} = \hat{F}_n(\hat{\sigma}_n)-\hat{F}_n(-\hat{\sigma}_n).$$

Außerdem

$$|\hat{F}_n(\hat{\sigma}_n)-F(\sigma)| \leq |\hat{F}_n(\hat{\sigma}_n)-F(\hat{\sigma}_n)|+|F(\hat{\sigma}_n)-F(\sigma)|.$$

Starkes GGZ, $\mathbb{E}[X_1^2]<\infty \Rightarrow \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \to \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2$ f.s. $\overset{x\mapsto F(\sqrt{x})\text{ stetig}}{\Rightarrow} F(\hat{\sigma}_n)\to F(\sigma)$ f.s.

Außerdem $|\hat{F}_n(\hat{\sigma}_n)-F(\sigma)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|\hat{F}_n(x)-F(x)| \overset{\text{Bsp. 3.13}}{\to} 0$ f.s.

Es folgt: $\hat{F}_n(\hat{\sigma}_n)\to F(\sigma)$ f.s.

Analog: $\hat{F}_n(-\hat{\sigma}_n)\to F(-\sigma)$ f.s.

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{-\hat{\sigma}_n<X_i\leq\hat{\sigma}_n\}} = \hat{F}_n(\hat{\sigma}_n)-\hat{F}_n(-\hat{\sigma}_n)\to F(\sigma)-F(-\sigma)\quad f.s.$$

Lösung 63.

Lösung:

(a) $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. $\Rightarrow (\log(X_i))_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. (auf alle X_i wird die gleiche Funktion angewandt). Außerdem

$$\mathbb{E}|\log(X_1)| \overset{X_1\in[1,2]\text{ f.s.}}{=} \mathbb{E}\log(X_1) = \int_1^2 \log(x)\,\mathrm{d}x \underset{du/dx=\frac{1}{x}=e^{-u}}{\overset{u:=\log(x)}{=}} \int_0^{\log(2)} ue^u\,\mathrm{d}u = \log(4)-1<\infty.$$

Starkes GGZ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)\to\mathbb{E}[\log(X_1)] = \log(4)-1\quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

exp(...) stetig $\Rightarrow$

$$\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)\right)\to\exp(\log(4)-1) = \frac{4}{e}\quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

(b) X_i, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. $\Rightarrow f(X_i)$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. (es wird die gleiche Funktion auf jedes X_i angewandt)

f stetig auf Kompaktum $[0,1] \Rightarrow f$ beschränkt (z.B. $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [0,1]$) $\overset{X_1 \sim U[0,1],\text{ d.h. } X_1 \in [0,1]}{\Rightarrow} |f(X_1)| \leq C \Rightarrow \mathbb{E}|f(X_1)| \leq C < \infty$.
Starkes GGZ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \to \mathbb{E}f(X_1) = \int f d\mathbb{P}^{X_1} \overset{X_1 \sim U[0,1]}{=} \int f \mathbb{I}_{[0,1]} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

(c) Seien $X_i \sim U[0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_0^1 ... \int_0^1}_{n \text{ Integrale}} f(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}) dx_1 ... dx_n \\
\overset{X_i \sim U[0,1]}{=} \quad &\underbrace{\int ... \int}_{n \text{ Integrale}} f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) d\mathbb{P}^{X_1}(x_1)...d\mathbb{P}^{X_n}(x_n) \\
\overset{X_i \text{ unabh., Fubini}}{=} \quad &\int f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) d\mathbb{P}^{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \mathbb{E}f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i).
\end{aligned}$$

Starkes GGZ, $\mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2} < \infty \Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2} \quad f.s.$$

f stetig $\Rightarrow f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \to f(\frac{1}{2})$ f.s.
f stetig auf $[0,1] \Rightarrow f$ beschränkt (z.B. durch C, d.h. $\forall x \in [0,1] : |f(x)| \leq C$).
$\Rightarrow |f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) - f(\frac{1}{2})| \leq 2C$, $\mathbb{E}[2C] = 2C < \infty$.
Dominierte Konvergenz $\Rightarrow$

$$|\mathbb{E}f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) - f(\frac{1}{2})| = \big|\mathbb{E}\big[f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) - f(\frac{1}{2})\big]\big| \to 0.$$

$\Rightarrow \mathbb{E}f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \to f(\frac{1}{2})$.

Lösung 64.
Lösung:

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
A &= \{\max_{k=1,...,n} |S_k| \geq a\} = \{\exists k \in \{1,...,n\} : |S_k| \geq a\} \\
&\overset{(*)}{=} \{\exists k \in \{1,...,n\} : |S_1| < a, ..., |S_{k-1}| < a, |S_k| \geq a\} \\
&= \dot{\bigcup}_{k=1,...,n} A_k.
\end{aligned}$$

(*), d.h. insbesondere '$\subset$' gilt, da man immer das erste k wählen kann, bei welchem $|S_k| \geq a$ gilt.

(b) Es gilt

$$\mathbb{E}[S_n^2] \geq \mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_A] \overset{A=\dot{\bigcup}_{k=1,...,n} A_k}{=} \mathbb{E}[S_n^2(\sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k})] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}].$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}] &= \mathbb{E}[(S_n - S_k + S_k)^2 \mathbb{I}_{A_k}] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[(S_n - S_k)^2 \mathbb{I}_{A_k}]}_{\geq 0} + 2\mathbb{E}[(S_n - S_k) S_k \mathbb{I}_{A_k}] + \mathbb{E}[\underbrace{S_k^2}_{\overset{\text{Def. } A_k}{\geq} a^2} \mathbb{I}_{A_k}] \\
&\geq 0 + 2\mathbb{E}[(S_n - S_k) S_k \mathbb{I}_{A_k}] + a^2 \mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_k}] \\
&= 2\mathbb{E}[(S_n - S_k) S_k \mathbb{I}_{A_k}] + a^2 \mathbb{P}(A_k). \quad (**)
\end{aligned}$$

Es ist $S_n - S_k = f_1(X_{k+1}, ..., X_n)$ und $S_k \mathbb{I}_{A_k} = f_2(X_1, ..., X_k)$, d.h. diese beiden Terme hängen von verschiedenen unabhängigen ZV ab und sind daher unabhängig.
$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[(S_n - S_k) S_k \mathbb{I}_{A_k}] = \underbrace{\mathbb{E}[S_n - S_k]}_{=\sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}X_i = 0} \cdot \mathbb{E}[S_k \mathbb{I}_{A_k}] = 0.$$

$(**) \Rightarrow \mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}] \geq a^2 \mathbb{P}(A_k)$.

(d)

$$\mathbb{P}(\max_{k=1,...,n} |S_k| \geq a) = \mathbb{P}(A) \overset{(a)}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \overset{(c)}{\leq} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}]}{a^2} \overset{(b)}{\leq} \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{a^2}.$$

Lösung 65.
Lösung:

(a) Es gilt für $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(\frac{1}{n} \max_{k=1,...,n} |S_k| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\max_{k=1,...,n} |S_k| \geq n\varepsilon) \overset{(d)}{\leq} \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{n^2 \varepsilon^2}.$$

Weiter ist

$$\mathbb{E}S_n^2 = \text{Var}(S_n) \overset{X_i \text{ unabh.}}{=} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \leq n\sigma^2.$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(\frac{1}{n} \max_{k=1,...,n} |S_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0.$$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \max_{k=1,...,n} |S_k| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $(n-1)^2 < k \leq n^2$.
$\Rightarrow S_k \leq U_n$
$\Rightarrow \frac{S_k}{k} \leq \frac{U_n}{(n-1)^2} = \frac{n^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{U_n}{n^2}$
$\Rightarrow \limsup_{k \to \infty} \frac{S_k}{k} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{U_n}{n^2} = \limsup_{n \to \infty} \frac{U_n}{n^2}$.

(c) Für $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\frac{U_n}{n^2} - 0| \geq \varepsilon) \quad &\leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(U_n \geq \varepsilon \cdot n^2) \\
&\overset{\text{Kolmogorov-Ungl.}}{\leq} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[S_{n^2}^2]}{\varepsilon^2 (n^2)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n^2} \underbrace{\mathbb{E}[X_k^2]}_{\leq \sigma^2} \\
&\leq \quad \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.2 $\Rightarrow \frac{U_n}{n^2} \to 0$ f.s.

(d) Es gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|S_k|}{k} \overset{(b)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} \frac{U_n}{n^2} \overset{(c)}{=} 0 \quad f.s.$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{S_k}{k} = 0$ f.s.

Lösung 66.

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$.
Definiere $\theta_j := (\sigma - 1) + \varepsilon \cdot (j-1)$, $j = 1, ..., N := \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil + 1$ und

$$l_j(x) = \min\{x, \theta_j\} - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad u_j(x) = \min\{x, \theta_j\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}|u_j(X_1) - l_j(X_1)| = \mathbb{E}[\varepsilon] = \varepsilon.$$

Sei $f \in \mathcal{F}$ beliebig, d.h. $f = f_\theta$ mit $\theta \in [\sigma - 1, \sigma + 1] \Rightarrow \exists j \in \{1, ..., N\} : |\theta - \theta_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (denn θ_j bilden Gitter mit ε-Abstand).

$\Rightarrow |\min\{x, \theta\} - \min\{x, \theta_j\}| \leq \max\{|x - x|, |\theta - \theta_j|\} = |\theta - \theta_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. $\Rightarrow$

$$f_\theta(x) = \min\{x, \theta\} \leq \min\{x, \theta_j\} + \frac{\varepsilon}{2} = u_j(x),$$

und analog

$$l_j(x) = \min\{x, \theta_j\} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \min\{x, \theta\} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \min\{x, \theta\} = f_\theta(x).$$

$\Rightarrow \mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1,...,N} [l_j, u_j]$
Definition $N(\varepsilon, \mathcal{F}) \Rightarrow N(\varepsilon, \mathcal{F}) \leq N \leq \frac{2}{\varepsilon} + 2 < \infty$.
Bessere Abschätzungen von $N(\varepsilon, \mathcal{F})$ sind möglich; die hier angegebene ist aber möglichst einfach.

(b) Es gilt

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \mathbb{E}|f(X_1)| = \sup_{\theta\in[\sigma-1,\sigma+1]} \mathbb{E}|f_\theta(X_1)| = \sup_{\theta\in[\sigma-1,\sigma+1]} \mathbb{E} \underbrace{|\min\{X_1, \theta\}|}_{\leq \mathbb{E}\max\{|X_1|,|\theta|\}} \leq \mathbb{E}|X_1| + \sup_{\theta\in[\sigma-1,\sigma+1]} |\theta| < \infty.$$

Achtung: $|\min\{X_1,\theta\}| \le |\theta|$ *o.Ä. gilt wegen dem Betrag nicht!*
(a) $\Rightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$: $N(\varepsilon, \mathcal{F}) < \infty$
$\overset{\text{Glivenko-Cantelli 3.14}}{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta\in[\sigma-1,\sigma+1]} \big|M_n(\theta) - M(\theta)\big| &= \sup_{\theta\in[\sigma-1,\sigma+1]} \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \min\{X_1,\theta\} - \mathbb{E}\min\{X_1,\theta\}\Big| \\
= \sup_{f\in\mathcal{F}} \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) - \mathbb{E}f(X_1)\Big| &\to 0 \quad f.s.
\end{aligned}$$

(c) $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty \overset{\text{Starkes GGZ 3.9}}{\Rightarrow}$

$$\hat{\sigma}_n^2 \to \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 \quad f.s. \qquad (*)$$

Insbesondere gilt f.s.: $\hat{\sigma}_n \in [\sigma-1, \sigma+1]$ für n groß genug (**).
Es ist zu zeigen: $M_n(\hat{\sigma}_n) \to M(\sigma)$ f.s.

Es gilt f.s.

$$\begin{aligned}
& |M_n(\hat{\sigma}_n) - M(\sigma)| \\
\le\ & |M_n(\hat{\sigma}_n) - M(\hat{\sigma}_n)| + \underbrace{|M(\hat{\sigma}_n) - M(\sigma)|}_{\overset{(***)}{\le} |\hat{\sigma}_n - \sigma|} \\
\overset{(**)}{\le}\ & \sup_{\theta\in[\sigma-1,\sigma+1]]} \big|M_n(\theta) - M(\theta)\big| + |\hat{\sigma}_n - \sigma| \\
\overset{(*),(b)}{\to}\ & 0.
\end{aligned}$$

(***) gilt, da (Hinweis) $|\min\{X_1,\theta_1\} - \min\{X_1,\theta_2\}| \le \max\{|X_1 - X_1|, |\theta_1 - \theta_2|\} = |\theta_1 - \theta_2|$.

Anmerkungen:

- *Bei (***) genügt auch das einfache Argument, dass $M(\cdot)$ stetig ist (Stetigkeit von Parameterintegralen, vgl. P14).*
- *$M(\hat{\sigma}_n)$ ist immer noch zufällig. Man kann nicht einfach $M(\hat{\sigma}_n) = \mathbb{E}\min\{X_1, \hat{\sigma}_n\}$ schreiben, da die rechte Seite nicht mehr zufällig ist. Eine korrekte Darstellung wäre $M(\hat{\sigma}_n) = \mathbb{E}[\min\{X_1,\theta\}]\big|_{\theta=\hat{\sigma}_n}$ (erst Erwartungswert berechnen, dann $\hat{\sigma}_n$ einsetzen). Die Extra-Definition des Erwartungswerts als Funktion M hilft, diesen Unterschied zu erkennen.*

(d) Es gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \le \overline{X_n}\}} = \hat{F}_n(\overline{X_n}).$$

Außerdem

$$|\hat{F}_n(\overline{X_n}) - F(\mathbb{E}X_1)| \le |\hat{F}_n(\overline{X_n}) - F(\overline{X_n})| + |F(\overline{X_n}) - F(\mathbb{E}X_1)|.$$

Starkes GGZ, $\mathbb{E}|X_1| < \infty \Rightarrow \overline{X_n} \to \mathbb{E}X_1$ f.s. $\overset{F \text{ stetig}}{\Rightarrow} F(\overline{X_n}) \to F(\mathbb{E}X_1)$ f.s.
Außerdem $|\hat{F}_n(\overline{X_n}) - F(\overline{X_n})| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \overset{\text{Bsp. 3.13}}{\to} 0$ f.s.

Insgesamt: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \le \overline{X_n}\}} = \hat{F}_n(\overline{X_n}) \to F(\mathbb{E}X_1)$ f.s.

Lösung 67.

Lösung:

(a) Zunächst sind die Randdichten zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{f_X(x)}} &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{0\le x\le y\}} \exp(-y)\ \mathrm{d}y = \int_x^\infty \exp(-y)\ \mathrm{d}y \cdot \mathbb{I}_{\{x\ge 0\}} \\
&= \Big[-\exp(-y)\Big]_x^\infty \cdot \mathbb{I}_{\{x\ge 0\}} = \underline{\underline{\exp(-x)\cdot \mathbb{I}_{\{x\ge 0\}}}}, \\
\underline{\underline{f_Y(y)}} &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{0\le x\le y\}} \exp(-y)\ \mathrm{d}x = \exp(-y)\cdot \int_0^y 1\ \mathrm{d}x \cdot \mathbb{I}_{\{y\ge 0\}} \\
&= \underline{\underline{y\cdot \exp(-y)\cdot \mathbb{I}_{\{y\ge 0\}}}}.
\end{aligned}$$

Dann sind die bedingten Dichten gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{f_{X|Y=y}(x)}} &= \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y)>0 \\ 0, & f_Y(y)=0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\exp(-y)\cdot \mathbb{I}_{\{0\le x\le y\}}}{y\cdot \exp(-y)}, & y\ge 0 \\ 0, & y<0 \end{cases} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{y}\cdot \mathbb{I}_{\{0\le x\le y\}}}} \\
\underline{\underline{f_{Y|X=x}(y)}} &= \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x)>0 \\ 0, & f_X(x)=0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\exp(-y)\cdot \mathbb{I}_{\{0\le x\le y\}}}{\exp(-x)}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \\
&= \underline{\underline{e^x\cdot e^{-y}\cdot \mathbb{I}_{\{0\le x\le y\}}}}
\end{aligned}$$

(b) Die bedingten Erwartungswerte berechnen sich durch:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbb{E}[X|Y=y]}} &= \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_{X|Y=y}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x\cdot \frac{1}{y}\cdot \mathbb{I}_{\{0\le x\le y\}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{y}\int_0^y x\ \mathrm{d}x \cdot \mathbb{I}_{\{y\ge 0\}} \\
&= \frac{1}{y}\cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^y \cdot \mathbb{I}_{\{y\ge 0\}} = \underline{\underline{\frac{y}{2}\cdot \mathbb{I}_{\{y\ge 0\}}}} \\
\underline{\underline{\mathbb{E}[Y|X=x]}} &= \int_{\mathbb{R}} y\cdot f_{Y|X=x}(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} y\cdot e^x\cdot e^{-y}\cdot \mathbb{I}_{\{0\le x\le y\}}\ \mathrm{d}y = e^x\cdot \int_x^\infty y\cdot e^{-y}\ \mathrm{d}y\cdot \mathbb{I}_{\{x\ge 0\}} \\
&= e^x\cdot \Big[-(y+1)\cdot e^{-y}\Big]_x^\infty \cdot \mathbb{I}_{\{x\ge 0\}} = \underline{\underline{(x+1)\cdot \mathbb{I}_{\{x\ge 0\}}}}.
\end{aligned}$$

(c) Es ergibt sich (einfach 'kleines x' durch 'großes x' ersetzen):

$$\mathbb{E}[X|Y](\omega) = \mathbb{E}[X|Y=Y(\omega)] = \frac{Y(\omega)}{2}\cdot \mathbb{I}_{\{Y(\omega)\ge 0\}} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[X|Y] &= \frac{Y}{2}\cdot \mathbb{I}_{\{Y\ge 0\}}, \\ \mathbb{E}[Y|X] &= (X+1)\cdot \mathbb{I}_{\{X\ge 0\}}. \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Indikatorfunktionen sind hier am Ende strenggenommen nicht notwendig, weil $X, Y \ge 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

Lösung 68.

Lösung:

(a) Wir rechnen nach, dass $a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ die Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{F}]$ aus Prop. 4.11 erfüllt:

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}], \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ ist $\mathcal{F}$-messbar.
- Sei $F \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_F aX + Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= a \cdot \int_F X \, \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_F Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\overset{\text{Prop. 4.11}}{=} a \cdot \int_F \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_F \mathbb{E}[Y|\ \mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_F \Big(a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]\Big) \, \mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

$\overset{\text{Prop. 4.11}}{\Rightarrow} \mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ f.s.

(b) $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow F := \{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] < 0\} \in \mathcal{F}$. $\Rightarrow$

$$0 = \int_F 0 \, \mathrm{d}\mathbb{P} \geq \int_F \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} \overset{\text{Prop. 4.11}}{=} \int_F X \, \mathrm{d}\mathbb{P} \geq 0.$$

$\Rightarrow 0 = \int_F \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int \underbrace{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{I}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]<0\}}}_{\leq 0}$

$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]}_{<0} \mathbb{I}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]<0\}} = 0$ f.s. $\Rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] < 0) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \geq 0$ f.s.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|g(X_1, X_2)| &= \int |g(x_1, x_2)| \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) \\ &\overset{X_1, X_2 \text{ unabh., Fubini}}{=} \int\int |g(x_1, x_2)| \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{X_1}(x_1) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{X_2}(x_2) \\ &= \int \mathbb{E}\Big[|g(X_1, x_2)|\Big] \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{X_2}(x_2) = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[|g(X_1, y)|\Big]\Big|_{y=X_2}\Big] < \infty.\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{F} := X_2^{-1}(\mathcal{B}_2)$. Wir zeigen, dass $Z = \mathbb{E}[g(X_1, y)]\Big|_{y=X_2}$ die Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[g(X_1, X_2)|X_2]$ aus Prop. 4.11 erfüllt.

- X_2 $\mathcal{F}$-messbar, g messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[g(X_1, y)]\Big|_{y=X_2}$ $\mathcal{F}$-messbar.
- Sei $F \in \mathcal{F}$. $\Rightarrow F = X_2^{-1}(B)$ mit einem $B \in \mathcal{B}_2$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_F \mathbb{E}[g(X_1, y)]\Big|_{y=X_2} \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_B \mathbb{E}[g(X_1, x_2)] \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{X_2}(x_2) \\ &= \int_B \int_{\mathcal{X}_1} g(x_1, x_2) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{X_1}(x_1) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{X_2}(x_2) \\ &\overset{\text{Fubini, } \mathbb{E}|g(X_1,X_2)| < \infty}{=} \int_{\mathcal{X}_1 \times B} g(x_1, x_2) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) \\ &= \int_{(X_1,X_2)^{-1}(\mathcal{X}_1 \times B)} g(X_1, X_2) \, \mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Wegen $(X_1, X_2)^{-1}(\mathcal{X}_1 \times B) = X_1^{-1}(\mathcal{X}_1) \cap X_2^{-1}(B) = \Omega \cap F = F$ folgt die Behauptung.

Lösung 69.

Lösung:

(a) Sei $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-Y)^2] &= \mathbb{E}\Big[\big((X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) + (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)\big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] + 2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])\cdot(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)^2],
\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun zunächst den zweiten Summanden. Wegen $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}]]$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])\cdot(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)] \\
=\ & \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])\cdot(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)\Big|\mathcal{F}\Big]\Big] \\
\overset{Y,\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \text{ sind } \mathcal{F}\text{-messbar}}{=}\ & \mathbb{E}\Big[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)\cdot\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])\Big|\mathcal{F}\Big]\Big] \\
\overset{\text{Linearität bed. EW}}{=}\ & \mathbb{E}\Big[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)\cdot\Big(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\Big)\Big] \\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)^2].$$

(b) (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\underbrace{(X-Z)^2}_{=X^2-2XZ+Z^2} - XYZ + e^{XZ}|X,Y] \\
\overset{\text{Lin., Messbarkeit}}{=}\ & X^2 - 2X\cdot\mathbb{E}[Z|X,Y] + \mathbb{E}[Z^2|X,Y] - XY\mathbb{E}[Z|X,Y] + \mathbb{E}[e^{XZ}|X,Y] \\
\overset{\text{Unabh.}}{=}\ & X^2 - 2X\cdot\mathbb{E}Z + \mathbb{E}[Z^2] - XY\mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[e^{xZ}]\big|_{x=X} \\
\overset{X\sim N(0,1),\text{ Hinweis}}{=}\ & X^2 - 0 + 1 - XY\cdot 0 + \exp(-X^2/2) \\
=\ & X^2 + 1 + \exp(-X^2/2).
\end{aligned}$$

(ii) Es gilt $Z^2 = (Z-X+X)^2 = (Z-X)^2 + 2X(Z-X) + X^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z^2|X] &\overset{\text{Lin., Messbarkeit}}{=} \mathbb{E}[(Z-X)^2|X] + 2X\mathbb{E}[Z-X|X] + X^2 \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \mathbb{E}[(Z-X)^2] + 2X\mathbb{E}[Z-X] + X^2 \\
&\overset{Z-X\sim N(0,1)}{=} 1 + 0 + X^2.
\end{aligned}$$

(c) (i) Es ist X_i unabhängig von X_1, außer im Falle $i=1$. $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[S_n|X_1] \overset{\text{Lin., Messb.}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|X_1] \overset{\text{unabh.}}{=} X_1 + \sum_{i=2}^n \mathbb{E}[X_i] = X_1 + (n-1)\cdot\mathbb{E}[X_1].$$

$X_1, ..., X_n$ unabhängig $\Rightarrow$ X_n unabhängig von $S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$.
$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[S_n|\ S_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n + S_{n-1}|S_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n] + S_{n-1} = \mathbb{E}[X_1] + S_{n-1}.$$

(ii) Wir zeigen zuerst: Für alle $i = 1, ..., n$ gilt: $\mathbb{P}^{(X_i,S_n)} = \mathbb{P}^{(X_1,S_n)}$.
Da die X_i iid sind, gilt

$$\mathbb{P}^{(X_1,...,X_n)} \overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{P}^{X_1} \otimes ... \otimes \mathbb{P}^{X_n} \overset{\text{ident. verteilt}}{=} \mathbb{P}^{X_1} \otimes ... \otimes \mathbb{P}^{X_1}.$$

Dieselbe Darstellung erhalten wir für jede Permutation von $(X_1, ..., X_n)$, d.h. insbesondere ist für jedes $i \in \{1, ..., n\}$:

$$\mathbb{P}^{(X_i,X_2,...,X_{i-1},X_1,X_{i+1},...,X_n)} = \mathbb{P}^{X_1} \otimes ... \otimes \mathbb{P}^{X_1} = \mathbb{P}^{(X_1,...,X_n)}.$$

Anwendung der messbaren Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2, g(x_1, ..., x_n) := (x_1, \sum_{j=1}^n x_j)$ liefert für jedes $i \in \{1, ..., n\}$:

$$\mathbb{P}^{(X_i,S_n)} = \mathbb{P}^{g(X_i,X_2,...,X_{i-1},X_1,X_{i+1},...,X_n)} = \mathbb{P}^{g(X_1,...,X_n)} = \mathbb{P}^{(X_1,S_n)}.$$

Nun zur Aufgabe: Es gilt

$$S_n = \mathbb{E}[S_n|S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|S_n] \overset{(c)}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_1|S_n] = n \cdot \mathbb{E}[X_1|S_n],$$

d.h. $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \frac{S_n}{n}$.

Außerdem

$$\mathbb{E}[S_{n-1}|S_n] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[X_i|S_n] \overset{(c)}{=} (n-1)\mathbb{E}[X_1|S_n] = \frac{n-1}{n} S_n.$$

Lösung 70.

Lösung:

(a) Sei $\mathcal{F} = Y^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})$.
$\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ ist $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, Bild$(Y) = [0, t] \Rightarrow$

$$\mathcal{E} = Y^{-1}(\{[0, a] : 0 \ \leq a \leq t\})$$

ist $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{E}$.

Wir zeigen, dass $Z = Y\mathbb{I}_{\{Y<t\}} + \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\geq t\}}]}{\mathbb{P}(X\geq t)} \cdot \mathbb{I}_{\{Y=t\}}$ die Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ erfüllt.

- Y $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow$ Z $\mathcal{F}$-messbar.
- Sei $F = Y^{-1}([0, a]) \in \mathcal{E}$. Es gilt

$$\int_F X \ d\mathbb{P} \ = \ \int_{Y^{-1}([0,t))\dot{\cup}Y^{-1}([t,a))} X \ d\mathbb{P} = \int_{\{Y<t\}} X \ d\mathbb{P} + \int_{\{a\geq Y\geq t\}} X \ d\mathbb{P} \quad (*)$$

Auf $\{Y < t\} = \{X < t\}$ gilt $X = Y = Z \Rightarrow$

$$\int_{\{Y<t\}} X \ d\mathbb{P} = \int_{\{Y<t\}} Z \ d\mathbb{P}.$$

Es ist $\{a \geq Y \geq t\} = \{X \geq t\}$ (natürlich nur, falls $a = t$, sonst tritt der Summand nicht auf) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_{\{a\geq Y\geq t\}} X \, d\mathbb{P} &= \int X\mathbb{I}_{\{X\geq t\}} \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\geq t\}}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\geq t\}}]}{\mathbb{P}(X \geq t)} \underbrace{\mathbb{P}(X \geq t)}_{=\int_{\{a\geq Y\geq t\}}} \, d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{a\geq Y\geq t\}} Z \, d\mathbb{P}\end{aligned}$$

Einsetzen in (*)

$$\int_F X \, d\mathbb{P} = \int_{\{Y<t\}} Z \, d\mathbb{P} + \int_{\{a\geq Y\geq t\}} Z \, d\mathbb{P} = \int_F Z \, d\mathbb{P}.$$

Maßerweiterungssatz (linke, rechte Seite endliche Maße in $F \in \mathcal{F}$) $\Rightarrow$ obige Gleichheit gilt für alle $F \in \mathcal{F}$.

(b) (i) X stetig verteilt $\Rightarrow X \neq 0$ f.s. $\Rightarrow X = \sqrt{Z}\mathbb{I}_{\{X>0\}} - \sqrt{Z}\mathbb{I}_{\{X<0\}} \Rightarrow$

$$\mathbb{E}[X|Z] = \mathbb{E}[\sqrt{Z}\mathbb{I}_{\{X>0\}}|Z] + \mathbb{E}[-\sqrt{Z}\mathbb{I}_{\{X<0\}}|Z].$$

(ii) Für $z > 0$ ist

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X^2 \leq z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) = F(\sqrt{z}) - F(-\sqrt{z}) \\ &\Rightarrow \quad f_Z(z) = \partial_z F_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}\big(f(\sqrt{z}) + f(\sqrt{-z})\big) \quad \lambda - f.s.\end{aligned}$$

(iii) Sei $\mathcal{F} = Z^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})$.
$\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, $\operatorname{Bild}(Z) = [0, \infty) \Rightarrow$

$$\mathcal{E} := Z^{-1}(\{[0, a]) : a \geq 0\})$$

ist $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass $W := \frac{f(\sqrt{Z})}{f(\sqrt{Z})+f(-\sqrt{Z})}$ die Charakterisierung eines bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X>0\}}|Z]$ aus Prop. 4.11 erfüllt.

- Z $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow$ W $\mathcal{F}$-messbar.
- Sei nun $F = Z^{-1}([0, a]) \in \mathcal{E}$. $\Rightarrow$

$$\int_F \mathbb{I}_{\{X>0\}} \, d\mathbb{P} = \int_{\{\sqrt{a}\geq X>0\}} d\mathbb{P} = \mathbb{P}^X((0, \sqrt{a}]) = F(\sqrt{a}) - F(0),$$

und

$$\begin{aligned}\int_F W \, d\mathbb{P} &= \int_{[0,a]} \frac{f(\sqrt{z})}{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})} \underbrace{d\mathbb{P}^Z(z)}_{=f_Z(z)d\lambda(z)} \overset{(ii)}{=} \int_{[0,a]} \frac{f(\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} \, d\lambda(z) \\ &\overset{u:=\sqrt{z}}{=} \int_0^{\sqrt{a}} f(u) \, d\lambda(u) = F(\sqrt{a}) - F(0) = \int_F \mathbb{I}_{\{X>0\}} \, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Maßerweiterungssatz (linke, rechte Seite Maße) $\Rightarrow$ Gleichheit gilt für alle $F \in \mathcal{F}$.

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|X^2] &\overset{(i)}{=} \sqrt{Z}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X>0\}}|Z] - \sqrt{Z}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X<0\}}|Z] \\
&\overset{\text{(iii) + analog}}{=} \sqrt{Z}\cdot\Big[\frac{f(\sqrt{Z})}{f(\sqrt{Z})+f(-\sqrt{Z})} - \frac{f(-\sqrt{Z})}{f(\sqrt{Z})+f(-\sqrt{Z})}\Big] \\
&= \sqrt{Z}\cdot\frac{f(\sqrt{Z})-f(-\sqrt{Z})}{f(\sqrt{Z})+f(-\sqrt{Z})}.
\end{aligned}$$

Lösung 71.

Lösung:

(a) Zunächst sind die Randdichten zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{f_X(x)}} &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}y = 8x\int_x^1 y\ \mathrm{d}y\cdot\mathbb{I}_{\{0\le x\le 1\}} \\
&= 4x(1-x^2)\mathbb{I}_{\{0\le x\le 1\}}, \\
\underline{\underline{f_Y(y)}} &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x = 8y\int_0^y x\ \mathrm{d}x\cdot\mathbb{I}_{\{0\le y\le 1\}} \\
&= 4y^3\mathbb{I}_{\{0\le y\le 1\}}.
\end{aligned}$$

Dann sind die bedingten Dichten gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{f_{X|Y=y}(x)}} &= \begin{cases}\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y)>0\\ 0, & f_Y(y)=0\end{cases} = \begin{cases}\frac{2x}{y^2}\mathbb{I}_{\{0\le x\le y\le 1\}}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases} \\
&= \underline{\underline{\frac{2x}{y^2}\mathbb{I}_{\{0\le x\le y\le 1\}}}} \\
\underline{\underline{f_{Y|X=x}(y)}} &= \begin{cases}\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x)>0\\ 0, & f_X(x)=0\end{cases} = \begin{cases}\frac{2y}{1-x^2}\mathbb{I}_{\{0\le x\le y\le 1\}}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases} \\
&= \underline{\underline{\frac{2y}{1-x^2}\mathbb{I}_{\{0\le x\le y\le 1\}}}}
\end{aligned}$$

(b) Die bedingten Erwartungswerte berechnen sich durch:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbb{E}[X|Y=y]}} &= \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_{X|Y=y}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{y^2}\int_0^y x^2\ \mathrm{d}x\mathbb{I}_{\{0\le y\le 1\}} = \frac{2}{3}y\mathbb{I}_{\{0\le y\le 1\}}, \\
\underline{\underline{\mathbb{E}[Y|X=x]}} &= \int_{\mathbb{R}} y\cdot f_{Y|X=x}(y)\ \mathrm{d}y = \frac{2}{1-x^2}\cdot\int_x^1 y^2\ \mathrm{d}y\cdot\mathbb{I}_{\{0\le x\le 1\}} \\
&= \frac{2}{3}\frac{1-x^3}{1-x^2}\mathbb{I}_{\{0\le x\le 1\}} = \frac{2}{3}\frac{1+x+x^2}{1+x}\mathbb{I}_{\{0\le x\le 1\}}.
\end{aligned}$$

(c) Es ergibt sich (einfach 'kleines x' durch 'großes x' ersetzen):

$$\mathbb{E}[X|Y](\omega) = \mathbb{E}[X|Y=Y(\omega)] = \frac{2}{3}Y(\omega)\mathbb{I}_{\{0\le Y(\omega)\le 1\}} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y] &= \frac{2}{3}Y\mathbb{I}_{\{0\le Y\le 1\}}, \\ \mathbb{E}[Y|X] &= \frac{2}{3}\frac{1+X+X^2}{1+X}\mathbb{I}_{\{0\le X\le 1\}}.\end{aligned}$$

Anmerkung: Die Indikatorfunktionen sind hier am Ende strenggenommen nicht notwendig, weil $X,Y\in[0,1]$ $\mathbb{P}$-f.s.

Lösung 72.

Lösung:

(a) Wir rechnen nach, dass $Z = 1$ die Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[1|\mathcal{F}]$ aus Prop. 4.11 erfüllt:

- $Z = 1$ konstant, also $\mathcal{F}$-messbar
- Sei $F \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\int_F \underbrace{1}_{\text{die 1 aus } \mathbb{E}[1|\mathcal{F}]} \, d\mathbb{P} = \int_F Z \, d\mathbb{P}$$

$\overset{\text{Prop. 4.11}}{\Rightarrow} \mathbb{E}[1|\mathcal{F}] = 1$ f.s.

Wir rechnen nach, dass $\mathbb{E}X$ die Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[X|\{\emptyset,\Omega\}]$ aus Prop. 4.11 erfüllt:

- $\mathbb{E}X$ konstant, also $\{\emptyset,\Omega\}$-messbar
- Sei $F \in \{\emptyset,\Omega\}$. Dann gilt

$$\int_F X \, d\mathbb{P} = \begin{cases} \mathbb{E}X, & F = \Omega, \\ 0, & F = \emptyset \end{cases} = \int_F \mathbb{E}X \, d\mathbb{P}.$$

$\overset{\text{Prop. 4.11}}{\Rightarrow} \mathbb{E}[X|\{\emptyset,\Omega\}] = \mathbb{E}X$ f.s.

(b) Wir rechnen nach, dass $X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ die Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}]$ aus Prop. 4.11 erfüllt:

- $X, \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ ist $\mathcal{F}$-messbar.
- Sei $F \in \mathcal{F}$.

(1) Sei $X = \mathbb{I}_A$, $A \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\int_F XY \, d\mathbb{P} = \int_{A\cap F} Y \, d\mathbb{P} \overset{\text{Prop. 4.11, } A\cap F \in \mathcal{F}}{=} \int_{A\cap F} \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, d\mathbb{P} = \int_F X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, d\mathbb{P}.$$

Achtung Tutor/innen: Ab hier nicht weiter vorrechnen, sondern nur noch sagen, dass es jetzt weitergeht mit maßtheoretischer Induktion.

(2) Sei $X = \sum_{j=1}^k x_j \mathbb{I}_{A_j}$ primitive Funktion mit $x_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\int_F XY \, d\mathbb{P} \overset{\text{Lin.}}{=} \sum_{j=1}^k x_j \int \mathbb{I}_{A_j} Y \, d\mathbb{P} \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^k x_j \int_F \mathbb{I}_{A_j}\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, d\mathbb{P} \overset{\text{Lin.}}{=} \int_F X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, d\mathbb{P}.$$

(3) Sei $X \geq 0$ $\mathcal{F}$-messbar und $0 \leq X_n \uparrow X$ Folge primitiver Funktionen.
Sei zunächst $Y \geq 0$.
$Y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq X_n Y \uparrow XY$ (*), und $X_n\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \uparrow X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ (**),
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_F XY \, d\mathbb{P} &\overset{\text{mon. Konv. (*)}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_F X_n Y \, d\mathbb{P} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_F X_n \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, d\mathbb{P} \\ &\overset{\text{mon. Konv. (**)}}{=} \int_F X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Sei nun Y beliebig. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_F XY \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_F XY^+ \, \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_F XY^- \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X\mathbb{E}[Y^+|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_F X\mathbb{E}[Y^-|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\overset{\text{Lin. } \mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}]}{=} \int_F X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

(4) Sei X $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow$

$$\int_F X^+Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X^+\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad \int_F X^-Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X^-\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

$\Rightarrow \int_F XY \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X^+Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_F X^-Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X^+\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_F X^-\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P}$.

$\overset{\text{Prop. 4.11}}{\Rightarrow} \mathbb{E}[XY|\mathcal{F}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ f.s.

(c) Sei $\mathcal{F} := X_3^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Wir zeigen, dass $\mathbb{E}[f(X_1)|X_3]$ die Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[f(X_2)|X_3]$ erfüllt.

- $\mathcal{F} = X_3^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \Rightarrow \mathbb{E}[f(X_1)|X_3]$ ist $\mathcal{F}$-messbar.
- Sei $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F = X_3^{-1}(B)$ mit einem $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_F f(X_2) \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{X_3^{-1}(B)} f(X_2) \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int f(X_2) \cdot \mathbb{I}_B(X_3) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int f(y) \cdot \mathbb{I}_B(z) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{(X_2,X_3)}(y,z) \\ &\overset{\text{Vorauss.}}{=} \int f(y) \cdot \mathbb{I}_B(z) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{(X_1,X_3)}(x,z) = \text{wie zuvor} \\ &= \int_F f(X_1) \, \mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Lösung 73.

Lösung:

(a) Es gilt

$$Kov(X, \mathbb{E}[Y|X]) = \underbrace{\mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|X]]}_{\overset{\text{messbar}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|X]] \overset{\text{iter. EW}}{=} \mathbb{E}[XY]} - \mathbb{E}[X] \cdot \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]}_{=\mathbb{E}Y} = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = Kov(X,Y).$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &\overset{\text{Vorauss.}}{=} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[Y|X] \cdot Y\Big] \overset{\text{iter. EW}}{=} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[Y|X] \cdot Y \Big| Y\Big]\Big] \\ &\overset{Y \text{ } Y\text{-messb.}}{=} \mathbb{E}\Big[Y \cdot \underbrace{\mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}[Y|X]}_{\overset{\text{Vorauss.}}{=} X} \Big| Y\Big]}_{\overset{\text{Vorauss.}}{=} Y}\Big] = \mathbb{E}[Y^2].\end{aligned}$$

Auf analoge Weise kann man als Ergebnis $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2]$ erhalten.
$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - 2\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]) = 0.$$

$\Rightarrow X = Y$ $\mathbb{P}$-f.s.

(c) (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[4X\sin(Y)+5Z^2-3e^XY+\sin(XZ)|Y,Z] \\
\overset{\text{Lin., Messbarkeit}}{=} \quad & 4\sin(Y)\cdot\mathbb{E}[X|Y,Z]+5Z^2-3Y\mathbb{E}[e^X|Y,Z]+\mathbb{E}[\sin(XZ)|Y,Z] \\
\overset{\text{Unabh.}}{=} \quad & 4\sin(Y)\cdot\mathbb{E}X+5Z^2-3Y\mathbb{E}[e^X]+\mathbb{E}[\sin(Xz)]\big|_{z=Z} \\
\overset{X\sim U[0,1]}{=} \quad & 4\sin(Y)\cdot\int_0^1 xdx+5Z^2-3Y\int_0^1 e^x dx+\int_0^1\sin(xz)dx\big|_{z=Z} \\
= \quad & 4\sin(Y)\cdot\frac{1}{2}+5Z^2-3Y(e-1)+\frac{1}{Z}(1-\cos(Z)).
\end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\exp(Z)=\exp(Z-X+X)=\exp(Z-X)\exp(X)\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(Z)|X] \quad & \overset{\text{Lin., Messbarkeit}}{=} \quad \exp(X)\mathbb{E}[\exp(Z-X)|X] \\
& \overset{\text{Unabh.}}{=} \quad \exp(X)\cdot\mathbb{E}\exp(Z-X) \\
& \overset{Z-X\sim N(0,1),\text{Hinweis}}{=} \quad \exp(X)e^{-\frac{1}{2}}=e^{X-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\mathbb{E}[M_n|X_1] \overset{\text{messbar}}{=} X_1\mathbb{E}[\prod_{i=2}^n X_i|\, X_1] \overset{\text{Unabh.}}{=} \mathbb{E}[\prod_{i=2}^n X_i] \overset{\text{iid}}{=} X_1\cdot\mathbb{E}[X_1]^{n-1}.$$

Außerdem

$$\mathbb{E}[M_n|M_{n-1}]=\mathbb{E}[X_n\cdot M_{n-1}|M_{n-1}] \overset{\text{messbar}}{=} M_{n-1}\mathbb{E}[X_n|M_{n-1}] \overset{\text{Unabh.}}{=} M_{n-1}\mathbb{E}[X_n]=M_{n-1}\mathbb{E}X_1.$$

Lösung 74.

Lösung:

(a) (i) Sei $\mathcal{F}=(X^+)^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})$.
$\{(-\infty,a]:a\in\mathbb{R}\}$ $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, $\text{Bild}(X^+)=[0,\infty)\Rightarrow$

$$\mathcal{E}:=(X^+)^{-1}(\{[0,a]):a\geq 0\})$$

ist $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass $W:=-\frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\leq 0\}}]}{\mathbb{P}(X\leq 0)}\mathbb{I}_{\{X^+=0\}}$ die Charakterisierung eines bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[X^-|X^+]$ aus Prop. 4.11 erfüllt.

– X^+ $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow \mathbb{I}_{\{X^+=0\}}$ $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow W$ $\mathcal{F}$-messbar.
– Sei nun $F=(X^+)^{-1}([0,a])\in\mathcal{E}$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_F X^-\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{(X^+)^{-1}(0)} X^-\,\mathrm{d}\mathbb{P}+\int_{(X^+)^{-1}((0,a])}\underbrace{X^-}_{=0\text{ (da }X^+>0)}\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int X^-\mathbb{I}_{\{X^+=0\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int -X\mathbb{I}_{\{X\leq 0\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}=\frac{-\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\leq 0\}}]}{\mathbb{P}(X\leq 0)}\underbrace{\mathbb{P}(X\leq 0)}_{=\int_F\mathbb{I}_{\{X^+=0\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}} \\
&= \int_F W\,\mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Maßerweiterungssatz (linke, rechte Seite Maße) $\Rightarrow$ Gleichheit gilt für alle $F\in\mathcal{F}$.

(ii) Es gilt $X = X^+ - X^- \Rightarrow$

$$\mathbb{E}[X|X^+] = \mathbb{E}[X^+ - X^-]|X^+] = X^+ - \mathbb{E}[X^-|X^+] \overset{(i)}{=} X^+ + \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\le 0\}}]}{\mathbb{P}(X\le 0)}\mathbb{I}_{\{X^+=0\}}.$$

(b) (i) X, Y i.i.d. $\Rightarrow \mathbb{P}^{(X,Y)} = \mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y = \mathbb{P}^Y \otimes \mathbb{P}^X = \mathbb{P}^{(Y,X)}$.
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x, \max\{x,y\})$ messbar $\Rightarrow \mathbb{P}^{(X,\max\{X,Y\})} = \mathbb{P}^{g(X,Y)} = \mathbb{P}^{g(Y,X)} = \mathbb{P}^{(Y,\max\{X,Y\})}$.
P34(c) $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\max\{X,Y\}] = \mathbb{E}[Y|\max\{X,Y\}]$.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}[X|\max\{X,Y\}] &= \mathbb{E}[X+Y|\max\{X,Y\}] \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} \mathbb{E}[\max\{X,Y\} + \min\{X,Y\}|\max\{X,Y\}] \\ &= \max\{X,Y\} + \mathbb{E}[\min\{X,Y\}|\max\{X,Y\}] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

(ii) Sei $U = \min\{X,Y\}$, $V = \max\{X,Y\}$. Für $0 < u \le v$ gilt:

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u,v) &= \mathbb{P}(U\le u, V\le v) \overset{\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A^c\cap B)}{=} \mathbb{P}(V\le v) - \mathbb{P}(U>u, V\le v) \\ &= \mathbb{P}(X\le v, Y\le v) - \mathbb{P}(u<X\le v, u<Y\le v) \\ &\overset{\text{i.i.d.}}{=} F(v)^2 - (F(v)-F(u))^2 = 2F(u)F(v) - F(u)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_{U,V}(u,v) = \partial_u\partial_v F_{U,V}(u,v) = 2f(u)f(v)\mathbb{I}_{\{u\le v\}}$ λ^2-f.s.
Wie oben: $F_V(v) = \mathbb{P}(V\le v) = F(v)^2 \Rightarrow f_V(v) = \partial_v F(v) = 2F(v)f(v)$ λ-f.s.

(iii) $\Rightarrow$

$$f_{U|V=v}(u) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_V(v)} = \frac{f(u)\mathbb{I}_{\{u\le v\}}}{F(v)} \quad \lambda - f.s.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U|V=v] &= \int u f_{U|V=v}(u)\,\mathrm{d}\lambda(u) = \frac{1}{F(v)}\int u f(u)\mathbb{I}_{\{u\le v\}}\,\mathrm{d}\lambda(u) = \frac{1}{F(v)}\int X\mathbb{I}_{\{X\le v\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{F(v)}\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\le v\}}]. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[U|V] = \frac{1}{F(V)}\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\le v\}}]\big|_{v=V}$.
$\Rightarrow \mathbb{E}[X|V] \overset{(i)}{=} \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}\mathbb{E}[U|V] = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2F(V)}\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\le v\}}]\big|_{v=V}$.

(iv) Hier ist $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ und $F(x) = x$ ($x\in[0,1]$). $\Rightarrow$ Für $v\in[0,1]$:

$$\frac{1}{F(v)}\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\le v\}}] = \frac{1}{v}\int_0^v x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}v.$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X|\max\{X,Y\}] = \frac{3}{4}\max\{X,Y\}$.

Lösung 75.

Lösung: Wir rechnen jeweils die Martingal-Eigenschaften nach:

(a) Für $n\in\mathbb{N}$ gilt:

- $(X_n),(Y_n)$ sind $(\mathcal{F}_n)$-Martingale $\Rightarrow \mathbb{E}|X_n|, \mathbb{E}|Y_n| < \infty \Rightarrow \mathbb{E}|aX_n + bY_n| \leq |a| \cdot \mathbb{E}|X_n| + |b| \cdot \mathbb{E}|Y_n| < \infty$.
- $(X_n),(Y_n)$ sind $(\mathcal{F}_n)$-Martingale $\Rightarrow X_n, Y_n \in \mathcal{F}_n \Rightarrow aX_n + bY_n \in \mathcal{F}_n$.
- $\mathbb{E}[aX_{n+1} + bY_{n+1}|\mathcal{F}_n] = a\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + b\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{X_n, Y_n \text{ Mart.}}{=} aX_n + bY_n$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Voraussetzung $\Rightarrow \mathbb{E}|\phi(X_n)| < \infty$.
- (X_n) ist $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal $\Rightarrow X_n \in \mathcal{F}_n$
  $\phi : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ ist monoton nicht fallend und daher messbar $\Rightarrow \phi \circ X_n = \phi(X_n) \in \mathcal{F}_n$.
- Es ist

$$\mathbb{E}[\phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \overset{\text{Jensen-Ungl.}}{\geq} \phi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \overset{\phi \text{ mon. wachs. und } \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n}{\geq} \phi(X_n).$$

(c) Es gilt $X_n = \sum_{k=1}^n D_k \Rightarrow$

$$\operatorname{Var}(X_n) = \operatorname{Cov}(\sum_{k=1}^n D_k, \sum_{k=1}^n D_l) = \sum_{k,l=1}^n \operatorname{Cov}(D_k, D_l) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Var}(D_k) + 2 \sum_{k,l=1,k>l}^n \operatorname{Cov}(D_k, D_l). \qquad (*)$$

Es ist für $k \in \{1, ..., n\}$:

$$\mathbb{E}[D_k] = \mathbb{E}[X_k - X_{k-1}] = \mathbb{E}[X_k] - \mathbb{E}[X_{k-1}] \overset{X_n \text{ Mart.}}{=} 0,$$

$\Rightarrow$ Für $k > l$ gilt

$$\operatorname{Cov}(D_k, D_l) = \mathbb{E}[D_k D_l] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[D_k D_l|\mathcal{F}_{k-1}]] = \mathbb{E}[D_l \cdot \underbrace{\mathbb{E}[D_k|\mathcal{F}_{k-1}]}_{=\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1} \overset{X_n \text{ Mart.}}{=} 0}] = 0.$$

$\Rightarrow$ 2. Summand in (*) verschwindet $\Rightarrow \operatorname{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Var}(D_k)$.

(d) S, T Stoppzeiten $\Rightarrow S, T$ $\mathcal{A}$-messbar $\Rightarrow S \wedge T$ $\mathcal{A}$-messbar. Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\{S \wedge T > n\} = \underbrace{\{S > n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T > n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

$\Rightarrow S \wedge T$ Stoppzeit.

Lösung 76.

Lösung:

(a) Definiere Blöcke $B_n := (\varepsilon_{(a+b)(n-1)+1}, ..., \varepsilon_{(a+b)n})$ der Länge $(a+b)$ und $\theta := \inf\{n \in \mathbb{N} : B_n = (1, ..., 1)\}$.

Wir zeigen $\tau \leq (a+b)\theta$: Ist $\theta = n$, so muss $(\varepsilon_{(a+b)(n-1)+1}, ..., \varepsilon_{(a+b)n}) = B_n = (1, ..., 1)$ sein. Dann folgt aber $\tau \leq (a+b)n$, denn nach schrittweiser Addition von $(a+b)$ muss S_n den Bereich $\{0, ..., a+b\}$ verlassen haben (wenn nicht sogar schon vorher τ eingetreten ist). Also ist $\tau \leq (a+b)n = (a+b)\theta$.

$B_n, n \in \mathbb{N}$ i.i.d. mit $w := \mathbb{P}(B_1 = (1,...,1)) = \mathbb{P}(\varepsilon_{(a+b)(n-1)+1} = 1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(\varepsilon_{(a+b)n} = 1) = p^{a+b}$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta = n) &= \mathbb{P}\Big(\forall 1 \le k \le n-1 : B_k \neq (1,...,1), B_n = (1,...,1)\Big) \\ &= (1-w)^{n-1} \cdot w,\end{aligned}$$

$\Rightarrow \theta \sim \mathrm{Geo}(w)$ ist geometrisch verteilt $\Rightarrow \mathbb{E}\theta = \frac{1}{w} < \infty$.
$\Rightarrow \mathbb{E}\tau \le (a+b)\mathbb{E}\theta \le \frac{a+b}{w} < \infty$.

(b) Wir nutzen die Abkürzung $q := 1-p$.
$((q/p)^{S_n})$ ist ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal, denn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $S_n \in \mathcal{F}_n \Rightarrow W_n = (q/p)^{S_n} \in \mathcal{F}_n$.

(ii) Es ist $\mathbb{E}[(q/p)^{\varepsilon_1}] = (q/p)^1 \cdot p + (q/p)^{-1} \cdot (1-p) = 1$. Weil die ε_i i.i.d. sind, folgt

$$\mathbb{E}\left|(q/p)^{S_n}\right| = (q/p)^a \cdot \left(\mathbb{E}\left[(q/p)^{\varepsilon_1}\right]\right)^n = (q/p)^a < \infty.$$

(iii) Es gilt $(q/p)^{S_n} = (q/p)^{S_{n-1}} \cdot (q/p)^{\varepsilon_n}$, daher

$$\mathbb{E}\left[(q/p)^{S_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] = (q/p)^{S_{n-1}} \cdot \mathbb{E}\left[(q/p)^{\varepsilon_n}\right] = (q/p)^{S_{n-1}}.$$

(c) Wir wollen das OST(iii) auf $((q/p)^{S_n})$ und τ anwenden und zeigen zuerst die Voraussetzungen:

- $\mathbb{E}\tau < \infty \Rightarrow$ Es ist $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$,
- Weiter ist $S_\tau \in \{0, a+b\} \Rightarrow \mathbb{E}\left|(q/p)^{S_\tau}\right| \le \max\{1, (q/p)^{(a+b)}\} < \infty$.
- $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau > n) \overset{\text{Stet. Maß}}{=} \mathbb{P}(\tau = \infty) = 0. \Rightarrow$

$$\mathbb{E}\left|(q/p)^{S_n} \cdot \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}\right| \overset{\tau > n \Rightarrow S_n \in \{0,a+b\}}{\le} \max\{(q/p)^{a+b}, 1\} \cdot \mathbb{P}(\tau > n) \to 0.$$

OST(iii) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}(q/p)^a &= \mathbb{E}\left[(q/p)^{S_\tau}\right] = (q/p)^0 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = 0) + (q/p)^{a+b} \cdot \mathbb{P}(S_\tau = a+b) \\ &= 1 + \Big((q/p)^{a+b} - 1\Big) \cdot \mathbb{P}(S_\tau = a+b).\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 das gesamte Geld gewinnt, ist daher

$$\mathbb{P}(S_\tau = a+b) = \frac{(q/p)^a - 1}{(q/p)^{a+b} - 1}.$$

Lösung 77.

Lösung:

(a) Wir rechnen die drei Martingaleigenschaften nach: Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

- $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in \mathcal{F}_n \Rightarrow M_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k - (2n-1)p \in \mathcal{F}_n$.

- Es gilt $\mathbb{E}|\varepsilon_k| \leq 1 \Rightarrow$
$$\mathbb{E}|M_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\varepsilon_k| \leq n < \infty.$$
- Es ist $M_{n+1} = M_n + \varepsilon_{n+1} - (2p-1) \Rightarrow$

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{M_n \in \mathcal{F}_n, \varepsilon_{n+1} \text{ unabh. von } \mathcal{F}_n}{=} M_n + \mathbb{E}\varepsilon_{n+1} - (2p-1) \overset{\mathbb{E}\varepsilon_{n+1} = 1\cdot p + (-1)\cdot(1-p) = 2p-1}{=} M_n.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} \{\tau_b = n\} &= \{\inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k = b\} = n\} = \{S_0 \neq b, ..., S_{n-1} \neq b, S_n = b\} \\ &= \bigcap_{k=0}^{n-1} \underbrace{\{S_k \neq b\}}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S_n = b\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt: $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ ist Zufallsvariable. $\Rightarrow \tau$ $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit.

(c) τ_b $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit $\Rightarrow \tau_b \wedge m$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit mit $\tau_b \wedge m \leq m$ f.s.
$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal $\overset{\text{OST(i)}}{\Rightarrow}$

$$0 = \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}[M_{\tau_b \wedge m}] = \mathbb{E}[\underbrace{S_{\tau_b \wedge m}}_{\leq b}] - (2p-1)\mathbb{E}[\tau_b \wedge m] \leq b - (2p-1)\mathbb{E}[\tau_b \wedge m].$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\tau_b \wedge m] \leq \frac{b}{2p-1}$.

(d) Wir wenden OST(ii) auf M_n und τ_b an. Nachrechnen der Voraussetzungen:

- $0 \leq \tau_b \wedge m \uparrow \tau_b \Rightarrow \mathbb{E}\tau_b \overset{\text{mon. Konv.}}{=} \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[\tau_b \wedge m] \overset{(c)}{\leq} \frac{b}{2p-1}$.
- Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n||\mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E}[|\varepsilon_{n+1}||\mathcal{F}_n] + (2p-1) \leq 1 + (2p-1) = 2p$.

OST(ii) $\Rightarrow$

$$0 = \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_{\tau_b} = \mathbb{E}[\underbrace{S_{\tau_b}}_{=b}] - (2p-1)\mathbb{E}\tau_b = b - (2p-1)\mathbb{E}\tau_b$$

$\Rightarrow \mathbb{E}\tau_b = \frac{b}{2p-1}$.

(e) $|\varepsilon_1| \leq 1$ f.s. $\Rightarrow \mathbb{E}|\varepsilon_1| \leq 1 < \infty$.
SGGZ $\Rightarrow \frac{1}{n}S_n \to \mathbb{E}\varepsilon_1 = 1 \cdot p + (-1)\cdot(1-p) = 2p - 1 > 0$ f.s.
$\Rightarrow S_n = n \cdot \underbrace{\frac{1}{n}S_n}_{\to 2p-1} \to \infty$ f.s.

(f) τ_b $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit $\Rightarrow \tau_b \wedge m$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit mit $\tau_b \wedge m \leq m$ f.s.
$(W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal $\overset{\text{OST(i)}}{\Rightarrow}$
$$1 = \mathbb{E}W_0 = \mathbb{E}[W_{\tau_b \wedge m}].$$
Definition τ_b, $\frac{1-p}{p} \leq 1 \Rightarrow |W_{\tau_b\wedge m}| \leq (\frac{1-p}{p})^b$.
Dominierte Konvergenz $\Rightarrow$

$$1 = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[W_{\tau_b\wedge m}] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} W_{\tau_b\wedge m}] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} W_{\tau_b\wedge m}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] + \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} W_{\tau_b\wedge m}\mathbb{I}_{\{\tau_b=\infty\}}]$$

Ist $\tau_b(\omega) < \infty$, so gilt

$$\lim_{m\to\infty} W_{\tau_b\wedge m}(\omega) = W_{\tau_b}(\omega) = (\frac{1-p}{p})^b.$$

Ist $\tau_b(\omega) = \infty$, so gilt (für ω außerhalb der Nullmenge von (e)):

$$\lim_{m\to\infty} W_{\tau_b\wedge m}(\omega) = \lim_{m\to\infty} (\frac{1-p}{p})^{S_m(\omega)} \overset{\frac{1-p}{p}<1}{=} 0.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} W_{\tau_b\wedge m}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] + \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} W_{\tau_b\wedge m}\mathbb{I}_{\{\tau_b=\infty\}}] \\ &= \mathbb{E}[(\frac{1-p}{p})^b\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] + \mathbb{E}[0\cdot\mathbb{I}_{\{\tau_b=\infty\}}] = (\frac{1-p}{p})^b \cdot \mathbb{P}(\tau_b < \infty). \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau_b < \infty) = (\frac{p}{1-p})^b$.

Lösung 78.

Lösung:

(a)
- Anteil der roten Kugeln vor dem n-ten Zug ist $M_n \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = M_n, \qquad \mathbb{P}(X_{n+1} = 0|\mathcal{F}_n) = 1 - M_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

- *Betrachte nun den Zeitpunkt nach dem* $(n+1)$*-ten Zug:*
  Dann gilt $R_{n+1} = R_n + X_{n+1} = M_n(n+2) + X_{n+1} \Rightarrow$

$$M_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{(n+1)+2} = \frac{n+2}{n+3} \cdot M_n + \frac{1}{n+3} \cdot X_{n+1}.$$

- $n = 0$: genau eine rote und eine schwarze Kugel liegen in der Urne $\Rightarrow$ Anteil rote Kugeln $M_0 = \frac{1}{2}$. Es ist $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le M_n \le 1$, denn M_n bezeichnet den Anteil der roten Kugeln. Formaler Beweis mittels Induktion:
  Induktionsanfang: $0 \le M_0 = \frac{1}{2} \le 1$
  Induktionsschritt: Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $0 \le M_n \le 1$, so folgt

$$0 \le \frac{n+2}{n+3} \cdot \underbrace{M_n}_{0\le} + \frac{1}{n+3} \cdot \underbrace{X_{n+1}}_{0\le} = M_{n+1} = \frac{n+2}{n+3} \cdot \underbrace{M_n}_{\le 1} + \frac{1}{n+3} \cdot \underbrace{X_{n+1}}_{\le 1} \le \frac{n+2}{n+3} + \frac{1}{n+3} = 1.$$

(b) Wir zeigen nun, dass (M_n) ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal ist. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- $M_n \in \mathcal{F}_n = \sigma(M_k : k \le n)$ per Konstruktion.
- $|M_n| \le 1 \Rightarrow \mathbb{E}|M_n| = \mathbb{E}M_n \le 1 < \infty$.
- Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\Big[\frac{n+2}{n+3} \cdot M_n + \frac{1}{n+3} \cdot X_{n+1}\Big] \\ &= \frac{n+2}{n+3} \cdot \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] + \frac{1}{n+3} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{=1\cdot\mathbb{P}(X_{n+1}=1|\mathcal{F}_n)+0\cdot\mathbb{P}(X_{n+1}=0|\mathcal{F}_n)=M_n} \\ &= \frac{n+2}{n+3} \cdot M_n + \frac{1}{n+3} \cdot M_n = M_n. \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\{\tau > n\} = \{X_1 = 1, ..., X_n = 1\}$$

(anschaulich: erste schwarze Kugel nach dem n-ten Zug genau dann, wenn in den ersten n Runden alle gezogenen Kugeln rot waren).
'Ganz normale Bayes-Regel' (keine abstrakten bedingten Verteilungen / Erwartungswerte notwendig) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > n) &= \mathbb{P}(X_n = 1 | X_{n-1} = 1, ..., X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1, ..., X_1 = 1) \\ &= ... \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1 | X_{k-1} = 1, ..., X_1 = 1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \\ &\overset{\text{Teleskop}}{=} \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

(Gegeben $X_{k-1} = 1, ..., X_1 = 1$ sind im k-ten Zug sind k Kugeln rot, 1 Kugel schwarz)

(d) Wir wenden das OST(iii) auf M_n und τ an. Wir rechnen die Voraussetzungen nach:

- Es gilt

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = \mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau > n\}) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\tau > n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

- $|M_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{E}|M_\tau| \leq 1$.
- $|M_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{E}[M_n \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{\tau > n\}}] = \mathbb{P}(\tau > n) = \frac{1}{n+1} \to 0$.

Es gilt $R_\tau = \tau$, denn vor Spielzug τ kamen $\tau - 1$ rote Kugeln. 1 rote Kugel lag schon in der Urne.
OST(iii) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} = M_0 = \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}[\frac{R_\tau}{\tau + 2}] = \mathbb{E}[\frac{\tau}{\tau + 2}].$$

Lösung 79.

Lösung:

(a) Wir müssen die drei Eigenschaften eines Submartingals nachrechnen: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- $(X_n), (Y_n)$ Submartingale $\Rightarrow \mathbb{E}|X_n|, \mathbb{E}|Y_n| < \infty \Rightarrow \mathbb{E}|X_n \vee Y_n| \leq \mathbb{E}\big[|X_n| \vee |Y_n|\big] \leq \mathbb{E}\big[|X_n| + |Y_n|\big] = \mathbb{E}|X_n| + \mathbb{E}|Y_n| < \infty$
- $(X_n), (Y_n)$ sind $(\mathcal{F}_n)$-Submartingale $\Rightarrow X_n, Y_n \in \mathcal{F}_n$
  Die Funktion $\max(.,.) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig und daher messbar $\Rightarrow \max(X_n, Y_n) = X_n \vee Y_n \in \mathcal{F}_n$.
- Es gilt

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_{n+1} \vee Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq \begin{cases} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \overset{X_n \text{ Submart.}}{\geq} X_n \\ \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \overset{Y_n \text{ Submart.}}{\geq} Y_n \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_{n+1} \vee Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n \vee Y_n.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist

$$C_n := \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]}_{\in \mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_{n-1}} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Es gilt weiter für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} C_n - C_{n-1} &= \mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]}_{\substack{\geq Y_{n-1} \\ ((Y_n) \text{ Submart.})}} - \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]}_{\substack{=Y_{n-1} \\ (Y_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}, \text{ da } (Y_n) \text{ Submart.})}} \qquad (*) \\ &\geq Y_{n-1} - Y_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_n$ ist monoton wachsend.

Wir zeigen nun, dass (X_n) ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal ist: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:s

- Es ist $C_1 = 0$ und (C_n) monoton wachsend, daher ist $\forall n \in \mathbb{N} : C_n \geq 0$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|C_n| &= \mathbb{E}C_n = \mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}[Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]\right] \\ &= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]\Big] \\ &\overset{\text{iter. Erwart.}}{=} \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}[Y_k - Y_{k-1}] \\ &\overset{\text{Teleskop}}{=} \mathbb{E}[Y_n] - \mathbb{E}[Y_1] \overset{(Y_n) \text{ Submart.}}{<} \infty \end{aligned}$$

  Weil (Y_n) Submartingal, gilt $\mathbb{E}|Y_n| < \infty$. $\Rightarrow \mathbb{E}|X_n| \leq \mathbb{E}|Y_n| + \mathbb{E}|C_n| < \infty$.
- $C_n \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$, und $C_1 = 0 \in \mathcal{F}_1$.
  (Y_n) Submartingal $\Rightarrow Y_n \in \mathcal{F}_n \Rightarrow X_n = Y_n - C_n \in \mathcal{F}_n$.
- Es ist

$$\begin{aligned} & C_n - C_{n-1} \overset{(*)}{=} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] - Y_{n-1} \\ \overset{C_n \in \mathcal{F}_{n-1}}{\Rightarrow} \quad & \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[Y_n - C_n|\mathcal{F}_{n-1}] = Y_{n-1} - C_{n-1} = X_{n-1}. \end{aligned}$$

(c) S, T Stoppzeiten $\Rightarrow S, T$ $\mathcal{A}$-messbar $\Rightarrow S \vee T$, $S + T$ $\mathcal{A}$-messbar. Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$:

- $\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, da $\{S \leq n\}, \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
- $\{S + T = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S = k, T = n - k\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S = k\} \cap \{T = n - k\} \in \mathcal{F}_n$, da $\{S = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n, \{T = n - k\} \in \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$ für $0 \leq k \leq n$.

$\Rightarrow S \vee T$, $S + T$ Stoppzeiten.

Lösung 80.

Lösung:

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}\{\tau_b = n\} &= \{\inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k \in \{2,-3\}\} = n\} = \{S_0 \notin \{2,-3\}, ..., S_{n-1} \notin \{2,-3\}, S_n \in \{2,-3\}\} \\ &= \bigcap_{k=0}^{n-1} \underbrace{\{S_k \notin \{2,-3\}\}}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S_n \in \{2,-3\}\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.\end{aligned}$$

Insbesondere folgt: $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ ist Zufallsvariable. $\Rightarrow \tau$ $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit.

(b) Definiere Blöcke $B_n := (\varepsilon_{5n-4}, ..., \varepsilon_{5n})$ der Länge 5 und $\theta := \inf\{n \in \mathbb{N} : B_n = (1,1,1,1,1)\}$.
Wir zeigen $\tau \leq 5\theta$: Ist $\theta = n$, so muss $(\varepsilon_{5n-4}, ..., \varepsilon_{5n}) = B_n = (1,1,1,1,1)$ sein. Dann folgt aber $\tau \leq 5n$, denn nach schrittweiser Addition von 5 muss S_n den Bereich $\{-3,-2,-1,0,1,2\}$ verlassen haben (wenn nicht sogar schon vorher τ eingetreten ist). Also ist $\tau \leq 5n = 5\theta$.

B_n, $n \in \mathbb{N}$ i.i.d. mit $w := \mathbb{P}(B_1 = (1,1,1,1,1)) = \frac{1}{2^5} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta = n) &= \mathbb{P}\Big(\forall 1 \leq k \leq n-1 : B_k \neq (1,1,1,1,1), B_n = (1,1,1,1,1)\Big) \\ &= (1-w)^{n-1} \cdot w,\end{aligned}$$

$\Rightarrow \theta \sim \text{Geo}(w)$ ist geometrisch verteilt $\Rightarrow \mathbb{E}\theta = \frac{1}{w} < \infty$.
$\Rightarrow \mathbb{E}\tau \leq 5\mathbb{E}\theta \leq \frac{5}{w} < \infty$.

(c) Definition $\tau \Rightarrow S_\tau \in \{2,-3\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&1 = \mathbb{P}(S_\tau = 2) + \mathbb{P}(S_\tau = -3) \\ \Rightarrow\ &\mathbb{E}[S_\tau] = 2 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = 2) - 3 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = -3) = 2 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = 2) - 3\big(1 - \mathbb{P}(S_\tau = 2)\big) \\ &\qquad = 5\mathbb{P}(S_\tau = 2) - 3 \qquad (*)\end{aligned}$$

Wir wenden das OST(ii) auf das Martingal (S_n) (Vorlesung) und τ an.

- (b) $\Rightarrow \mathbb{E}\tau < \infty$
- $$\mathbb{E}[|S_n - S_{n-1}||\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[|\varepsilon_n||\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}|\varepsilon_n| = 1$$

OST (ii) $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}S_0 = 0.$$

(*) $\Rightarrow 0 = 5\mathbb{P}(S_\tau = 2) - 3 \Rightarrow \mathbb{P}(S_\tau = 2) = \frac{3}{5}$.

(d) $(S_n^2 - n)$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ ist, denn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- $S_n \in \mathcal{F}_n \Rightarrow S_n^2 - n \in \mathcal{F}_n$.
- Es ist
$$\mathbb{E}|S_n^2 - n| \leq \mathbb{E}[S_n^2] + n = \sum_{j,k=1}^{n} \mathbb{E}[\varepsilon_j \varepsilon_k] + n \overset{\mathbb{E}\varepsilon_1 = 0, \mathbb{E}[\varepsilon_1^2]=1}{=} n \cdot 1 + n = 2n < \infty.$$
- Es ist $S_{n+1}^2 = (S_n + \varepsilon_{n+1})^2 = S_n^2 + 2\varepsilon_{n+1}S_n + \varepsilon_{n+1}^2 \Rightarrow$
$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n] = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2] - (n+1) = S_n^2 + 0 + 1 - (n+1) = S_n^2 - n.$$

Wir wollen OST(iii) auf das Martingal $(S_n^2 - n)$ und die Stoppzeit τ anwenden:

- $\mathbb{E}\tau < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$,
- Es gilt
$$\mathbb{E}|S_\tau^2 - \tau| \leq \mathbb{E}[S_\tau^2] + \mathbb{E}\tau \overset{S_\tau \in \{2,-3\}}{\leq} 9 + \mathbb{E}\tau < \infty.$$
- Falls $\tau > n \Rightarrow S_n \in \{-2,-1,0,1\}$, d.h. $S_n^2 \leq 4$.
$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau > n) \overset{\text{Markov-Ungl.}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[\tau^2]}{n^2} \overset{(b)}{\leq} \frac{25\mathbb{E}[\theta^2]}{n^2}$
$\Rightarrow$
$$\mathbb{E}[(S_n^2 - n)\mathbb{I}_{\{\tau > n\}}] \leq (4+n)\mathbb{P}(\tau > n) \leq (4+n)\frac{25\mathbb{E}[\theta^2]}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

OST(iii) $\Rightarrow$
$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[S_\tau^2 - \tau] = \mathbb{E}[S_0^2 - 0] = 0 \\ \Rightarrow\quad &\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}[S_\tau^2] = 2^2 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = 2) + (-3)^2\mathbb{P}(S_\tau = -3) \\ &\quad = 4 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = 2) + 9 \cdot \big(1 - \mathbb{P}(S_\tau = 2)\big) \overset{\mathbb{P}(S_\tau = 2) = \frac{3}{5}}{=} 6. \end{aligned}$$

Lösung 81.
Lösung:

(a) Wir wählen die Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$. Wir rechnen nun die drei Martingaleigenschaften nach. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist:

- $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in \mathcal{F}_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \in \mathcal{F}_n \Rightarrow M_n = \frac{\exp(\sigma S_n)}{\cosh(\sigma)^n} \in \mathcal{F}_n$.
- Es gilt $\mathbb{E}e^{\sigma\varepsilon_1} = \frac{1}{2}e^\sigma + \frac{1}{2}e^{-\sigma} = \cosh(\sigma)$ (*) $\Rightarrow$
$$\mathbb{E}|M_n| = \mathbb{E}M_n \overset{\text{unabh.}}{=} \frac{1}{\cosh(\sigma)^n}\prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{\sigma M_k}] = 1^n = 1 < \infty.$$
- $S_{n+1} = S_n + \varepsilon_{n+1} \Rightarrow$
$$M_{n+1} = \frac{1}{\cosh(\sigma)^{n+1}}\exp\big(\sigma S_{n+1}\big) = M_n \cdot \frac{e^{\sigma\varepsilon_{n+1}}}{\cosh(\sigma)}.$$
$S_n \in \mathcal{F}_n$, ε_{n+1} unabh. von $\mathcal{F}_n \Rightarrow$
$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n \cdot \frac{\mathbb{E}[e^{\sigma\varepsilon_{n+1}}]}{\cosh(\sigma)} \overset{(*)}{=} M_n.$$

(b) τ_b $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit $\Rightarrow \tau_b \wedge m$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit mit $\tau_b \wedge m \leq m$ f.s.
$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal $\overset{\text{OST(i)}}{\Rightarrow}$
$$1 = \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}[M_{\tau_b \wedge m}]. \quad (*)$$
Definition $\tau_b \Rightarrow |M_{\tau_b\wedge m}| \leq e^{\sigma b}$. Außerdem $\lim_{m\to\infty} M_{\tau_b\wedge m} = M_{\tau_b}$. (**)
Es folgt
$$1 \overset{(*)}{=} \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}[M_{\tau_b\wedge m}] \overset{\text{dom. Konv., (**)}}{=} \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_{\tau_b\wedge m}] = \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_{\tau_b\wedge m}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] + \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_{\tau_b\wedge m}\mathbb{I}_{\{\tau_b=\infty\}}]$$

Ist $\tau_b < \infty$, so gilt

$$\lim_{m\to\infty} M_{\tau_b\wedge m} = M_{\tau_b} = \frac{e^{\sigma b}}{\cosh(\sigma)^{\tau_b}}.$$

Ist $\tau_b = \infty$, so gilt

$$\lim_{m\to\infty} M_{\tau_b\wedge m} \le \lim_{m\to\infty} \frac{e^{\sigma b}}{\cosh(\sigma)^m} = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_{\tau_b\wedge m}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] + \mathbb{E}[\lim_{m\to\infty} M_{\tau_b\wedge m}\mathbb{I}_{\{\tau_b=\infty\}}] \\ &= \mathbb{E}[\frac{e^{\sigma b}}{\cosh(\sigma)^{\tau_b}}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] + \mathbb{E}[0\cdot \mathbb{I}_{\{\tau_b=\infty\}}] = \mathbb{E}[\frac{e^{\sigma b}}{\cosh(\sigma)^{\tau_b}}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}]. \end{aligned}$$

Sei $\sigma \le 1 \Rightarrow |\frac{e^{\sigma b}}{\cosh(\sigma)^{\tau_b}}| \le e^b$.
Außerdem $\frac{e^{\sigma b}}{\cosh(\sigma)^{\tau_b}} \to 1$ für $\sigma \downarrow 0$. Dominierte Konvergenz (strenggenommen mit $\sigma = \frac{1}{k} \downarrow 0$, $k \to \infty$) $\Rightarrow$

$$1 = \lim_{\sigma\downarrow 0} \mathbb{E}[\frac{e^{\sigma b}}{\cosh(\sigma)^{\tau_b}}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] = \mathbb{E}[\underbrace{\lim_{\sigma\downarrow 0} \frac{e^{\sigma b}}{\cosh(\sigma)^{\tau_b}}}_{=1}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}] = \mathbb{P}(\tau_b < \infty).$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1.$

(c) $S_{\tau_b} = b \Rightarrow \mathbb{E}S_{\tau_b} = b \neq 0 = \mathbb{E}S_0$.
Angenommen, $\mathbb{E}\tau_b < \infty$.
Außerdem $\mathbb{E}[|S_{n+1} - S_n||\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}|\varepsilon_{n+1}| \le 1$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal.
$\overset{\text{OST(ii)}}{\Rightarrow} \mathbb{E}S_{\tau_b} = \mathbb{E}S_0$, Widerspruch.
Also $\mathbb{E}\tau_b = \infty$.

Lösung 82.

Lösung:

(a)
- Anteil der roten Karten vor dem $(n+1)$-ten Zug ist R_n, Es gibt noch $N-n$ Karten. $\Rightarrow \frac{R_n}{N-n} = M_n$ ist Anteil an roten Karten im Kartenstapel $\Rightarrow$

  $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = M_n, \qquad \mathbb{P}(X_{n+1} = 0|\mathcal{F}_n) = 1 - M_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

- *Betrachte nun den Zeitpunkt nach dem $(n+1)$-ten Zug:*
  Dann gilt $R_{n+1} = R_n - X_{n+1} = M_n(N-n) - X_{n+1} \Rightarrow$

  $$M_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{N-(n+1)} = \frac{N-n}{N-n-1}\cdot M_n - \frac{1}{N-n-1}\cdot X_{n+1}.$$

- $n = 0$: Hälfte rote Karten sind im Stapel $\Rightarrow$ Anteil rote Karten $M_0 = \frac{1}{2}$.
  Es ist $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le M_n \le 1$, denn M_n bezeichnet den Anteil der roten Karten. Formaler Beweis: $\sum_{i=1}^n X_i \ge n - \frac{N}{2}$ ($\frac{N}{2}$ Karten sind rot) $\Rightarrow R_n = \frac{N}{2} - \sum_{i=1}^n X_i \le N-n$ $\Rightarrow$

  $$0 \le M_n = \frac{R_n}{N-n} \le 1.$$

(b) Für $n \in \{0, ..., N-1\}$ gilt:

- Konstruktion $\mathcal{F}_n \Rightarrow M_n \in \mathcal{F}_n$,
- $0 \leq M_n \leq 1 \Rightarrow \mathbb{E}|M_n| \leq 1 < \infty$,
- Es ist

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{(a)}{=} \frac{N-n}{N-n-1} M_n - \frac{1}{N-n-1} \underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{=\mathbb{P}(X_{n+1}=1|\mathcal{F}_n) \overset{(a)}{=} M_n} = M_n.$$

$\Rightarrow (M_n)_{n\in\{0,\dots,N-1\}}$ ein Martingal.

(c) Es ist (beachte $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{\tau+1} = 1) &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, \tau = n) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X_{n+1}=1,\tau=n\}}|\mathcal{F}_n]\Big] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \Big[\underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n)}_{=M_n=M_\tau} \cdot \mathbb{I}_{\{\tau=n\}}\Big] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}[M_\tau \mathbb{I}_{\{\tau=n\}}] \\
&= \mathbb{E}[M_\tau].
\end{aligned}$$

(d) Wir wenden OST(i) auf das Martingal (M_n) und die Stoppzeit $\tau \leq N-1$ an. $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X_{\tau+1} = 1) \overset{(c)}{=} \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0] = \frac{1}{2},$$

d.h. jede Stoppstrategie hat dieselbe Gewinnwahrscheinlichkeit.

Lösung 83.
Lösung:

(a) Wir zeigen die drei Martingaleigenschaften: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

- $\varepsilon_k \in \mathcal{F}_n$ $(k = 1, ..., n) \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varepsilon_k \in \mathcal{F}_n \Rightarrow M_n = \exp(S_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2) \in \mathcal{F}_n$.
- Hinweis $\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varepsilon_k \sim N(0, \sum_{k=1}^n \alpha_k^2) \Rightarrow$

$$\mathbb{E}|M_n| = \mathbb{E}M_n = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2) \cdot \mathbb{E}\exp(S_n) \overset{\text{Hinweis}}{=} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2) \cdot \exp(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2) = 1 < \infty.$$

- ε_{n+1} unabhängig von $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$, $S_{n+1} = \alpha_{n+1}\varepsilon_{n+1} + S_n \Rightarrow$

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \underbrace{\exp(S_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2)}_{=M_n} \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2) \cdot \underbrace{\mathbb{E}\exp(\alpha_{n+1}\varepsilon_{n+1})}_{\overset{\text{Hinweis}}{=} \exp(\frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2)} = M_n.$$

(b) $M_n \geq 0 \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}[M_n^+] = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}M_n \overset{(a)}{=} 1 < \infty$.
Martingalkonvergenzsatz 5.22 $\Rightarrow$ Es gibt Zufallsvariable $M_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $M_n \to M_\infty$ f.s.

(c) In (a) schon gesehen: $S_n \sim N(0, \sum_{k=1}^n \alpha_k^2)$.
$\Rightarrow$

$$Z_n := \frac{S_n}{(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2)^{1/2}} \sim N(0,1).$$

$\Rightarrow$ Für $\gamma > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|M_n - 0| \geq \gamma) &= \mathbb{P}(\exp(S_n) \geq \gamma \exp(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2) = \mathbb{P}(S_n \geq \log(\gamma) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2) \\
&= \mathbb{P}(S_n \geq \log(\gamma) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2) \\
&= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{S_n}{(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2)^{1/2}}}_{=Z_n \overset{d}{=} Z \sim N(0,1)} \geq \underbrace{\frac{\log(\gamma)}{(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2)^{1/2}}_{=: a_n \to \infty} \Big) \\
&= \mathbb{P}(Z > \underbrace{a_n}_{\to\infty}) \to 0.
\end{aligned}$$

Der Punkt ist hier, dass man bei stochastischer Konvergenz Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung in der Wahrscheinlichkeit einfach ersetzen darf. Dadurch kann man Z_n durch die von n unabhängige ZV Z ersetzen. Alternativ kann man zum Beispiel auch Konvergenz im $\frac{1}{2}$-ten Mittel zeigen: $\mathbb{E}[|M_n - 0|^{1/2}] \to 0$.

$\Rightarrow M_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$.
stochastischer Limes f.s. eindeutig, $M_n \to M_\infty$ f.s. $\Rightarrow M_\infty = 0$ f.s.

(d) Angenommen, $M_n \overset{(1)}{\to} M$.
Stochastischer Limes eindeutig, (c) $\Rightarrow M = 0$
$M_n \overset{(1)}{\to} 0 \Rightarrow \mathbb{E}M_n \to \mathbb{E}0 = 0$.
Aber in (a) wurde schon gesehen: $\mathbb{E}M_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, Widerspruch!

Also konvergiert M_n nicht im 1.-ten Mittel.

Satz 5.29, (M_n) Martingal $\Rightarrow \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht gleichgradig integrierbar.

Lösung 84.

Lösung:

(a) Seien $x, c > 0$. Die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \phi(x) = (x+c)^2$ ist konvex. Außerdem ist ϕ auf $[0,\infty)$ monoton wachsend.

- $\Rightarrow \max_{1\leq k\leq n} Y_k > x > 0 \overset{\phi \text{ monoton wachsend auf } [0,\infty)}{\Rightarrow} \max_{1\leq k\leq n} \phi(Y_k) \geq \phi(x)$
$\Rightarrow$
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Y_k > x\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} (Y_k + c)^2 > (x+c)^2\right).$$
- $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mathbb{E}|\phi(Y_n)| = \mathbb{E}[(Y_n + c)^2] \leq 2\mathbb{E}[Y_n^2] + 2c^2 < \infty$ $\overset{A37(b), \phi \text{ mon. wachs. wird nicht benötigt bei Martingal}}{\Rightarrow} (\phi(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Satz 5.18 (Doob's Maximalungleichung), $(\phi(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegatives Submartingal $\Rightarrow$
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} (Y_k + c)^2 > (x+c)^2\right) = \mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} \phi(Y_k) > (x+c)^2) \overset{\text{Doob}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[\phi(Y_n)]}{(x+c)^2} = \frac{\mathbb{E}[Y_n^2] + c^2}{(x+c)^2}$$

Mit $c = \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{x} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} Y_k > x\right) &\le \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} (Y_k+c)^2 > (x+c)^2\right) \le \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]+c^2}{(x+c)^2} \\
&= \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]+\frac{\mathbb{E}[Y_n^2]^2}{x^2}}{\left(x+\frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{x}\right)^2} = \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]\cdot(x^2+\mathbb{E}[Y_n^2])}{(x^2+\mathbb{E}[Y_n^2])^2} = \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{\mathbb{E}[Y_n^2]+x^2}.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $\mathbb{E}[Y_0] = 1$. Die Martingaleigenschaft von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt, da für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist:

- $\mathbb{E}|X_n| \le \prod_{i=1}^n \mathbb{E}|Y_i| \le \left(\frac{5}{3}\right)^n < \infty$,
- $Y_i \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$ $(i = 1, ..., n)$, daher $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i \in \mathcal{F}_n$,
- Wegen $X_{n+1} = X_n \cdot Y_{n+1}$ gilt $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \cdot \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \cdot \mathbb{E}[Y_{n+1}] = X_n \cdot 1 = X_n$.

Der Martingalkonvergenzsatz ist nicht anwendbar, da $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$ verletzt ist. Formal:

- Sei $A_i := \{Y_i = 4\}$. $\Rightarrow A_1, ..., A_n$ unabhängig und gleichwahrscheinlich.
  Definiere $A := A_1 \cap ... \cap A_n$.
  Es gilt $X_n^+ \ge X_n^+ \mathbb{I}_A$.
  $\Rightarrow \mathbb{E}X_n^+ \ge \mathbb{E}X_n^+\mathbb{I}_A = (\prod_{i=1}^n 4)\cdot \mathbb{P}(A) = 4^n \cdot \mathbb{P}(A_1)^n = 4^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$ $(n \to \infty)$.
  $\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ = \infty$.

Lösung 85.
Lösung:

(a) Wir wollen den Martingalkonvergenzsatz auf das Martingal

$$X_n := \sum_{k=1}^n \frac{D_k}{k}$$

anwenden. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Für $1 \le k \le n$: $D_k = M_k - M_{k-1} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n \Rightarrow X_n = \sum_{k=1}^n \frac{D_k}{k} \in \mathcal{F}_n$.
- Es ist
  $$\mathbb{E}|X_n| \le \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}|D_k|}{k} \le \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}|M_k| + \mathbb{E}|M_{k-1}|}{k} < \infty$$
  als endliche Summe endlicher Werte.
- Es ist $X_{n+1} = X_n + \frac{D_{n+1}}{n+1} \Rightarrow$
  $$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + \frac{1}{n+1}\mathbb{E}[D_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + \frac{1}{n+1}\Big(\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] - M_n\Big) = X_n.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[X_n^+] \le \mathbb{E}|X_n| \le \mathbb{E}[X_n^2]^{1/2} \overset{A37(c)}{=} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}[D_k^2]}{k^2}\right)^{1/2},$$

d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^+] \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[D_k^2]}{k^2}\right)^{1/2} \overset{\text{Vorauss.}}{<} \infty.$

Martingalkonvergenzsatz $\Rightarrow$ Es gibt ZV $X_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$X_n \to X_\infty \quad f.s.$$

Sei $N \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge, so dass $\forall \omega \in N^c : \sum_{k=1}^n \frac{D_k(\omega)}{k} = X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$.
Kroneckers Lemma $\Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n D_k(\omega) \to 0.$$

Insgesamt: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n D_k \to 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

(b) Man rechnet wie in der Vorlesung nach, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$M_n := \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad M_0 := 0$$

ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$ ist (insbesondere folgt aus der Voraussetzung $\mathbb{E}\varepsilon_k^2 < \infty$ und damit $\mathbb{E}|\varepsilon_k| < \infty$). Mit (a) folgt dann für $D_n := M_n - M_{n-1} = \varepsilon_n$:

$$\frac{M_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varepsilon_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n D_k \to 0 \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

Lösung 86.

Lösung:

(a) (Hilfreich ist ein Bild von $x \mapsto a_n(x)$ zu zeichnen für z.B. $n = 2, 3$): Ist $x \in [\frac{k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^{n+1}})$, so gibt es zwei Möglichkeiten:

- k gerade, d.h. $k = 2u$ ($u \in \{1, ..., 2^n\}$) $\Rightarrow x \in [\frac{u-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{u}{2^n})$ und daher $a_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^{n+1}} = \frac{u-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = a_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}}$. (*)
- k ungerade, d.h. $k = 2u - 1$ ($u \in \{1, ..., 2^n\}$) $\Rightarrow x \in [\frac{u-1}{2^n}, \frac{u}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}})$ und daher $a_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^{n+1}} = \frac{u-1}{2^n} = a_n(x)$. (**)

$\Rightarrow a_{n+1} \in \{a_n, a_n + 2^{-(n+1)}\}$.

Wir zeigen nun, dass $\frac{1}{2}$ die Definition des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{a_{n+1}=a_n\}}|\mathcal{F}_n]$ erfüllt.

- Offensichtlich $\frac{1}{2} \in \mathcal{F}_n$,
- Sei $F = [\frac{u-1}{2^n}, \frac{u}{2^n}) \in \mathcal{F}_n$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_F \mathbb{I}_{\{a_{n+1}=a_n\}}\, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{x\in[\frac{u-1}{2^n},\frac{u}{2^n}):a_{n+1}(x)=a_n(x)} \mathrm{d}\lambda \overset{(*),(**)}{=} \lambda([\frac{u-1}{2^n}, \frac{u}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}})) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\lambda([\frac{u-1}{2^n}, \frac{u}{2^n})) = \int_F \frac{1}{2}\, \mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Maßerweiterungssatz, $\{[\frac{u-1}{2^n}, \frac{u}{2^n}), u \in \{1, ..., 2^n\}\}$ $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_n \Rightarrow$ Für alle $F \in \mathcal{F}_n$ gilt $\int_F \mathbb{I}_{\{n+1=a_n\}}\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F \frac{1}{2}\, \mathrm{d}\mathbb{P}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{a_{n+1}=a_n\}}|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{2}$.
Analog: $\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{a_{n+1}=a_n+2^{-(n+1)}\}}|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{2}$.

(b) Wir zeigen die drei Martingaleigenschaften für X_n: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

- a_n primitive Funktion auf den Mengen $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \in \mathcal{F}_n$ $(k = 1, ..., 2^n) \Rightarrow a_n \in \mathcal{F}_n$ $\overset{F \text{ stetig, d.h. messbar}}{\Rightarrow} X_n = \frac{F(a_n+2^{-n})-F(a_n)}{2^{-n}} \in \mathcal{F}_n$.
- F beschränkt auf $[0,1)$ durch z.B. $C > 0$ (d.h. $|F(x)| \leq C$ für alle $x \in [0,1)$)
$\Rightarrow |X_n| \leq \frac{|F(a_n+2^{-n})-F(a_n)|}{2^{-n}} \leq 2^n(C+C)$.
$\Rightarrow \mathbb{E}|X_n| \leq 2^{n+1}C < \infty$.
- In (a) gesehen: $a_{n+1} \in \{a_n, a_n + 2^{-(n+1)}\}$ (auch ohne Bedingung auf $\mathcal{F}_n$) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
= \; & \mathbb{E}[X_{n+1}(\mathbb{I}_{\{a_{n+1}=a_n\}} + \mathbb{I}_{\{a_{n+1}=a_n+2^{-(n+1)}\}})|\mathcal{F}_n] \\
= \; & 2^{n+1}\mathbb{E}[(F(a_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - F(a_{n+1}))\mathbb{I}_{\{a_{n+1}=a_n\}}|\mathcal{F}_n] \\
& \quad +2^{n+1}\mathbb{E}[(F(a_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - F(a_{n+1}))\mathbb{I}_{\{a_{n+1}=a_n+2^{-(n+1)}\}}] \\
= \; & 2^{n+1}(F(a_n + 2^{-(n+1)}) - F(a_n))\mathbb{P}(a_{n+1} = a_n|\mathcal{F}_n) \\
& \quad +2^{n+1}(F(a_n + 2^{-n}) - F(a_n + 2^{-(n+1)}))\mathbb{P}(a_{n+1} = a_n + 2^{-(n+1)}|\mathcal{F}_n) \\
\overset{(a)}{=} \; & 2^n(F(a_n + 2^{-n}) - F(a_n)) = X_n.
\end{aligned}$$

(c) F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \Rightarrow$

$$|X_n(x)| = \frac{|F(a_n(x) + 2^{-n}) - F(a_n(x))|}{2^{-n}} \leq 2^n L \cdot |(a_n(x) + 2^{-n}) - a_n(x)| = L.$$

Für $\varepsilon > 0$ wähle $L > 0$, dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n| \; > L\}}] = 0 < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar.

(d) (X_n) Martingal, $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar $\overset{\text{Satz 5.29}}{\Rightarrow}$ Es gibt eine Zufallsvariable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X_n = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(e) Sei $x \in [0,1)$. Sei $x_n = \frac{k_n}{2^n} \to x$ eine Folge wie im Hinweis.
Sei $n \in \mathbb{N}_0$.
$\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n] = X_n \Rightarrow$ Für $F = [0, x_n) \in \mathcal{F}_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[0,x_n)} f \; d\lambda \quad &= \quad \int_F f \; d\mathbb{P} = \int_F X_n \; d\mathbb{P} = 2^n \sum_{k=1}^{k_n} \int_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})} \underbrace{F(a_n + 2^{-n}) - F(a_n)}_{=F(\frac{k}{2^n})-F(\frac{k-1}{2^n})} \; d\lambda \\
&\overset{\text{Teleskop}}{=} \quad F(\frac{k_n}{2^n}) - F(0) = F(x_n) - F(0).
\end{aligned}$$

F stetig, $n \to \infty \Rightarrow$

$$\int_{[0,x)} f \; d\lambda = F(x) - F(0).$$

Lösung 87.

Lösung:

(a) Definition τ, $U_n \in \{0,1\} \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{P}(U_1 = 0, ..., U_{n-1} = 0, U_n = 1) \overset{U_i \text{ i.i.d.}}{=} \mathbb{P}(U_1 = 0)^{n-1}\mathbb{P}(U_n = 1) = (1-p)^{n-1}p$$

$\Rightarrow \tau \sim \text{Geo}(p)$.

Wir zeigen nun, dass (X_n) die drei Eigenschaften eines Martingals erfüllt: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

- $\{\tau > n\} = \{U_1 = 0, ..., U_n = 0\} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow X_n = (1-p)^{-n}\mathbb{I}_{\{\tau > n\}} \in \mathcal{F}_n$.
- $|X_n| \leq (1-p)^{-n} \Rightarrow \mathbb{E}|X_n| \leq (1-p)^{-n} < \infty$.
- Es gilt $\{\tau > n+1\} = \{U_1 = 0, ..., U_n = 0, U_{n+1} = 0\} = \{\tau > n\} \cap \{U_{n+1} = 0\} \Rightarrow$ $\mathbb{I}_{\{\tau > n+1\}} = \mathbb{I}_{\{\tau > n\}} \cdot \mathbb{I}_{\{U_{n+1}=0\}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= (1-p)^{-(n+1)}\mathbb{I}_{\{\tau>n\}}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{U_{n+1}=0\}}|\mathcal{F}_n] \\ &\overset{U_{n+1} \text{ unabh. von } \mathcal{F}_n}{=} X_n(1-p)^{-1}\underbrace{\mathbb{P}(U_{n+1} = 0)}_{=1-p} = X_n. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n = (1-p)^{-n}\mathbb{P}(\tau > n) = (1-p)^{-n}\underbrace{\mathbb{P}(U_1 = 0, ..., U_n = 0)}_{\overset{U_i \text{ i.i.d.}}{=} \mathbb{P}(U_1=0)^n = (1-p)^n} = 1.$$

$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| \leq 1 < \infty$.
Martingalkonvergenzsatz 5.22 $\Rightarrow$ Es gibt ZV X_∞ mit $X_n \to X_\infty$ f.s.

Wir zeigen nun: $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$. Dann: Eindeutigkeit stochastischer Limes $\Rightarrow X_n \to 0$ f.s.

Für $\gamma > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \gamma) = \mathbb{P}((1-p)^{-n}\mathbb{I}_{\{\tau>n\}} > \gamma) \leq \mathbb{P}(\tau > n) \overset{\text{siehe (b)}}{=} (1-p)^n \to 0.$$

(c) Angenommen, $X_n \overset{(1)}{\to} X$ mit einer ZV X.
Eindeutigkeit stochastischer Limes $\Rightarrow X = 0$.
Aber

$$\mathbb{E}|X_n - 0| = \mathbb{E}X_n \overset{\text{siehe (b)}}{=} 1 \not\to 0,$$

Widerspruch. Also konvergiert X_n nicht im 1.-ten Mittel.

(d) Angenommen, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig integrierbar.
(X_n) Martingal $\overset{\text{Satz 5.29}}{\Rightarrow} X_n \overset{(1)}{\to} X$ (X ZV), Widerspruch zu (c).

Lösung 88.

Lösung:

(a) Seien $x > 0$. Die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \phi(x) = x^2$ ist konvex. Außerdem ist ϕ auf $[0, \infty)$ monoton wachsend.

- $\Rightarrow \max_{1\leq k\leq n} Y_k > x > 0 \overset{\phi \text{ monoton wachsend auf } [0,\infty)}{\Rightarrow} \max_{1\leq k\leq n} \phi(Y_k) \geq \phi(x)$
  $\Rightarrow$
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Y_k > x\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Y_k^2 > x^2\right).$$
- $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mathbb{E}|\phi(Y_n)| = \mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$
  $\overset{A37(b),\phi \text{ mon. wachs. wird nicht benötigt bei Martingal}}{\Rightarrow} (\phi(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Satz 5.18 (Doob's Maximalungleichung), $(\phi(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegatives Submartingal $\Rightarrow$
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} Y_k^2 > x^2\right) = \mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} \phi(Y_k) > x^2) \overset{\text{Doob}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[\phi(Y_n)]}{x^2} = \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{x^2}.$$

(b) Supermartingaleigenschaft von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- $\mathbb{E}|X_n| \leq 2^n\mathbb{E}|Y_n| \leq 2^n < \infty$,
- $Y_n \in \mathcal{F}_n$, daher $X_n = -2^nY_n \in \mathcal{F}_n$,
- $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = -2^{n+1}\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = -2^{n+1}\mathbb{E}[Y_{n+1}] = -2^{n+1}\cdot\frac{1}{2} = -2^n \overset{Y_n\in\{0,1\}}{\leq} -2^nY_n = X_n$.

Angenommen, es gäbe ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}|X| < \infty$ und $X_n \to X$ f.s.
$\overset{|X|<\infty \text{ f.s.}}{\Rightarrow} X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$.
$\Rightarrow$
$$\mathbb{P}(|X_n - X_{n+1}| > 1) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{1}{2}) + \mathbb{P}(|X_{n+1} - X| > \frac{1}{2}) \to 0.$$
Es ist aber $|X_n - X_{n+1}| = 2^n|Y_n - 2Y_{n+1}| \leq 1 \Leftrightarrow Y_n = Y_{n+1} = 0$, d.h.
$$\mathbb{P}(|X_n - X_{n+1}| > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0, Y_{n+1} = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \not\to 0,$$
Widerspruch.
Der Martingalkonvergenzsatz 5.23 ist nicht anwendbar, da die Bedingung $X_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ verletzt ist.

Lösung 89.

Lösung:
$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $M_n := \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$ (Beweis analog zum Nachweis, dass $S_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ ein Martingal).

Hölder-Ungleichung $\Rightarrow$
$$\mathbb{E}[M_n^+] \leq \mathbb{E}|M_n| \leq \mathbb{E}[M_n^2]^{1/2}.$$
$\mathbb{E}[\varepsilon_k] = 0$, $\frac{\varepsilon_k}{k}$ unabhängig $\Rightarrow$
$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathrm{Var}(M_n) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(\frac{\varepsilon_k}{k}) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_k^2]}{k^2} \overset{\mathbb{E}[\varepsilon_k^2]=1}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$
Zusammen folgt
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}M_n^+ \leq \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} < \infty.$$

Martingalkonvergenzsatz 5.22 auf $(M_n) \Rightarrow$ Es gibt ZV $M_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k} = M_n \to M_\infty$ f.s.

Damit konvergiert $\sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon_k}{k}$ *als Reihe, denn* $\sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon_k}{k}$ *ist nur eine Bezeichnung für den Limes, sofern* $\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k}$ *für* $n \to \infty$ *konvergiert.*

Lösung 90.

Lösung:

(a) Wir zeigen die drei Martingaleigenschaften für (X_n): Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

- X_n primitive Funktion auf den Mengen $I_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \in \mathcal{F}_n$ $(k = 1, ..., 2^n) \Rightarrow X_n \in \mathcal{F}_n$.
- f beschränkt $\Rightarrow$ Es gibt $C > 0$ mit $|f| \leq C \Rightarrow |X_n| \leq 2^n \sum_{k=1}^{2^n} \int_{I_{n,k}} |f| \, \mathrm{d}\lambda \cdot \mathbb{I}_{I_{n,k}} \leq 2^n C \sum_{k=1}^{2^n} \underbrace{\lambda(I_{n,k})}_{2^{-n}} \mathbb{I}_{I_{n,k}} = C \underbrace{\sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{I}_{I_{n,k}}}_{=1} = C.$

  $\Rightarrow \mathbb{E}|X_n| \leq C < \infty.$
- Wir zeigen, dass X_n die Definition des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ erfüllt.
  - Es ist $X_n \in \mathcal{F}_n$ (siehe erste Martingaleigenschaft),
  - Sei $F = I_{n,k} \in \mathcal{E} = \{I_{n,k} : k = 1, ..., 2^n\}$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \int_F X_{n+1} \, \mathrm{d}\lambda \\
= \quad & 2^{n+1} \int_F \sum_{j=1}^{2^{n+1}} \int_{I_{n+1,j}} f \, \mathrm{d}\lambda \cdot \mathbb{I}_{I_{n+1,j}} \, \mathrm{d}\lambda \\
\overset{\text{nur für } j=2k,2k-1 \text{ Integral} \neq 0}{=} \quad & 2^{n+1} \int_{I_{n+1,2k-1}} f \, \mathrm{d}\lambda \cdot \underbrace{\lambda([\frac{k-1}{2^n}, \frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}))}_{=2^{-(n+1)}} \\
& +2^{n+1} \int_{I_{n+1,2k}} f \, \mathrm{d}\lambda \cdot \underbrace{\lambda([\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k}{2^n}))}_{=2^{-(n+1)}} \\
\overset{I_{n+1,2k-1} \cup I_{n+1,2k} = I_{n,k}}{=} \quad & \int_{I_{n,k}} f \, \mathrm{d}\lambda \overset{\text{wie zuvor}}{=} \int_F X_n \, \mathrm{d}\lambda \qquad (*)
\end{aligned}$$

  $\mathcal{E}$ $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_n \overset{\text{Maßerweiterungssatz}}{\Rightarrow}$ Gleichheit (*) gilt für alle $F \in \mathcal{F}_n$.

(b) In (a) gesehen: $|X_n| \leq C$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Für $\varepsilon > 0$ wähle $C > 0$, dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n| > C\}}] = 0 < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar.

(c) (X_n) Martingal, $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar $\overset{\text{Satz 5.29}}{\Rightarrow}$ Es gibt eine Zufallsvariable $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X_n = \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) *Hinweis an Tutor/innen: Den ersten Teil mit dem bedingten Erwartungswert weglassen, war schon in (a).*
Wir zeigen, dass X_n die Definition des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n]$ erfüllt.

- In (a) gesehen: $X_n \in \mathcal{F}_n$.
- Sei $F = I_{n,k} \in \mathcal{E} = \{I_{n,k} : k = 1, ..., 2^n\}$. $\Rightarrow$

$$\int_F f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{I_{n,k}} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_F X_n \,\mathrm{d}\lambda \qquad (*)$$

$\mathcal{E}$ $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_n$ $\overset{\text{Maßerweiterungssatz}}{\Rightarrow}$ Gleichheit (*) gilt für alle $F \in \mathcal{F}_n$.

Die σ-Algebra $\mathcal{F}_\infty := A(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$ erfüllt $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{B}_{[0,1)}$ (elementar). $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow f \in \mathcal{F}_\infty$.
Satz 5.29(iv)$\Rightarrow$(ii), $f \in \mathcal{F}_\infty$ $X_n \to f$ f.s.

Lösung 91.
Lösung:

(a) (i) Es gilt

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)e^{it})^k \overset{\text{geom. Summenformel}}{=} \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}.$$

(ii) Es ist

$$\phi_X'(t) = p(1-(1-p)e^{it})^{-2} i(1-p)e^{it} \quad \Rightarrow \quad \phi_X'(0) = i \cdot \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} = i\frac{1-p}{p}.$$

Momentenformel 6.14 $\Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{1}{i}\phi_X'(0) = \frac{1-p}{p}$.

(b) (i) Es ist

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \int e^{x(it-\lambda)} dx \overset{\text{Hinweis, Re}(it-\lambda) = -\lambda < 0}{=} -\frac{\lambda}{it-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

(ii) Es ist

$$\phi_X^{(n)}(t) = \lambda \cdot (\lambda - it)^{-n-1} \cdot n! \cdot (-1)^n \cdot (-i)^n = \lambda \cdot (\lambda - it)^{-n-1} \cdot n! \cdot i^n.$$

Momentenformel 6.14 $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{i^n}\phi_X^{(n)}(0) = n! \cdot \lambda \cdot (\lambda - 0)^{-n-1} = n! \cdot \lambda^{-n}.$$

Lösung 92.
Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(it\sum_{i=1}^{N}X_i\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big(it\sum_{i=1}^{N}X_i\Big)\mathbb{I}_{\{N=n\}}\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big(it\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)\mathbb{I}_{\{N=n\}}\Big]\end{aligned}$$

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[|\exp\Big(it\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)|\mathbb{I}_{\{N=n\}}] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{N=n\}}] = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}(N<\infty) \leq 1 < \infty,$$

$\Rightarrow$ Satz von Fubini kann zum Vertauschen der unendlichen Summe und des Erwartungswerts verwendet werden
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[\exp\Big(it\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)\mathbb{I}_{\{N=n\}}] \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\mathbb{E}[\exp\Big(it\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)]}_{=\phi_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)\overset{\text{i.i.d.}}{=}\phi_{X_1}(t)^n}\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\phi_{X_1}(t)^n\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[\phi_{X_1}(t)^N].\end{aligned}$$

(b) Es gilt (vgl. P45(b)):

$$\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}] = 1\cdot\mathbb{P}(X_1=0) + e^{it}\mathbb{P}(X_1=1) = (1-p)+p\cdot e^{it}.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &\overset{(a)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\phi_{X_1}(t)^n\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\big((1-p)+pe^{it}\big)^n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda((1-p)+pe^{it}))^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot\exp(\lambda((1-p)+pe^{it})) \\ &= \exp(\lambda p(e^{it}-1)) = \phi_{\mathrm{Poi}(\lambda p)}(t).\end{aligned}$$

Eindeutigkeitssatz 6.13 $\Rightarrow X \sim \mathrm{Poi}(\lambda p)$.

(c) X_1, X_2 unabhängig $\Rightarrow$ Für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\cdot\phi_{X_2}(t) = e^{it\mu_1}e^{-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}}\cdot e^{it\mu_2}e^{-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}} = e^{it(\mu_1+\mu_2)}e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}} = \phi_{N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(t).$$

Eindeutigkeitssatz 6.13 $\Rightarrow X_1+X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Lösung 93.

Lösung:

(a) Es ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\phi_{\delta_k}(t) = \mathbb{E}[e^{i\delta_k t}] = \int_{\{-1,1\}} e^{ixt}\,\mathrm{d}\mathbb{P}^{\delta_k}(x) = e^{i\cdot 1\cdot t}\cdot\mathbb{P}^{\delta_k}(1)+e^{i\cdot(-1)\cdot t}\cdot\mathbb{P}^{\delta_k}(-1) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos(t)$$

δ_i unabhängig $\Rightarrow \frac{\delta_i}{2^i}$ unabhängig
$\Rightarrow$

$$\phi_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{\frac{\delta_i}{2^i}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{\delta_i}\left(\frac{t}{2^i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^i}\right)$$

Es gilt $\sin(2z) = 2\cdot\cos(z)\cdot\sin(z)$ für $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2z)}{\sin(z)}$ (kann auch stetig fortgesetzt werden auf die Stellen $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Daher Bruch kein Problem). $\Rightarrow$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{t}{2^{i-1}}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2^i}\right)}\right) = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\sin\left(\frac{t}{2^i}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{t}{2^i}\right)} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin(t)}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

(b) Berechnung von ϕ_X: Es ist für $t \neq 0$:

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tx)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos(tx)\,\mathrm{d}x + \frac{i}{2}\sin(tx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{t}\sin(tx) - \frac{i}{t}\cos(tx)\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\sin(t)}{t}.\end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt $\phi_X(0) = 1$.
Für $t \neq 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{\lim_{n\to\infty}\left[2^n\cdot\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]} \overset{\text{L'Hosp.} \Rightarrow \lim_{x=2^{-n}\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = a}{=} \frac{\sin(t)}{t} = \phi_X(t).$$

und $\lim_{n\to\infty}\phi_{X_n}(0) = 1 = \phi_X(0)$.
$\overset{\text{Stetigkeitssatz 6.8}}{\Rightarrow} X_n \overset{D}{\to} X$.

Lösung 94.
Lösung:

(a) A45(a) $\Rightarrow$ Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\phi_{Y_n}(t) = \frac{p_n}{1-(1-p_n)e^{it}}.$$

Damit

$$\phi_{\frac{Y_n}{n}}(t) = \phi_{Y_n}(\frac{t}{n}) = \frac{np_n}{np_n e^{it/n} + n(1-e^{it/n})} \overset{\text{Hinweis, } np_n \to c}{\longrightarrow} \frac{c}{c-it} = \phi_{\mathrm{Exp}(c)}(t)$$

Stetigkeitssatz 6.8(i) $\Rightarrow \frac{Y_n}{n} \overset{D}{\to} \mathrm{Exp}(c)$.

(b) (i) Sei $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi_{Y_n}(t) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - it} \to \frac{\lambda}{\lambda - it} = \phi_Y(t).$$

Stetigkeitssatz 6.8(i) $\Rightarrow Y_n \xrightarrow{D} Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(ii) Angenommen, $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ wäre straff.
$\Rightarrow$ Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert $M \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{Y_n}([-M, M]) \geq 1 - \varepsilon = \frac{1}{2}$. Hier ist aber

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{Y_n}([-M, M]) &= \int_0^\infty \mathbb{I}_{[-M,M]}(x)\lambda_n e^{-\lambda_n x}dx = \int_0^M \lambda_n e^{-\lambda_n x}dx = \big[-e^{-\lambda_n x}\big]_0^M \\ &= 1 - e^{-\lambda_n M} \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

da $\lambda_n \to 0$.
Widerspruch zu $\mathbb{P}^{Y_n}([-M, M]) \geq 1 - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow \{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ nicht straff.

Würde $Y_n \xrightarrow{D} Y$ gelten mit einer ZV Y, so wäre $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ straff. Widerspruch. Also konvergiert Y_n nicht in Verteilung.

(iii) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi_{Y_n}(t) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - it} \to 1 = \phi_0(t).$$

Stetigkeitssatz 6.8(i) $\Rightarrow Y_n \xrightarrow{D} 0$ (d.h. auch $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$).

Lösung 95.

Lösung:

(a) (i) Es gilt

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \frac{1}{a}\int_0^a e^{itx}dx = \frac{1}{a}\Big[\frac{1}{it}e^{itx}\Big]_0^a = \frac{e^{ita} - 1}{ait}.$$

(Bei Nutzung rein reeller Analysis strenggenommen Aufteilung $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$ und dann erst Integrieren).

(ii) Es ist $|X| \leq |a|$, daher $\mathbb{E}[|X|] \leq |a| < \infty$ (damit Momentenformel 6.14 anwendbar). Es gilt

$$\begin{aligned}\phi_X'(t) &= \frac{iate^{ita} - e^{ita} + 1}{ait^2} \\ \Rightarrow \quad \phi_X'(0) &\overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{ia(e^{ita} + taie^{ita}) - aie^{ita}}{2ait} = \lim_{t\to 0}\frac{iae^{ita}}{2} = \frac{ia}{2}.\end{aligned}$$

Momentenformel 6.14 $\Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{1}{i}\phi_X'(0) = \frac{a}{2}$.

(b) (i) Sei $Z \sim \text{Bin}(1, p)$. Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi_{\text{Bin}(1,p)}(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}] = e^{it\cdot 0}\mathbb{P}(Z = 0) + e^{it\cdot 1}\mathbb{P}(Z = 1) = (1 - p) + pe^{it}.$$

(ii) Hinweis $\Rightarrow$ Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi_X(t) = \phi_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) \overset{\text{iid.}}{=} \phi_{X_1}(t)^n \overset{(i)}{=} ((1 - p) + pe^{it})^n.$$

(iii) Es gilt $|X| \leq n$ und daher $\mathbb{E}[X^2] \leq n^2$ (damit Momentenformel 6.14 anwendbar). Es ist

$$\phi_X'(t) = n((1-p)+pe^{it})^{n-1} \cdot ipe^{it} \quad \Rightarrow \quad \phi_X'(0) = inp,$$
$$\phi_X''(t) = n(n-1)((1-p)+pe^{it})^{n-2} \cdot (ip)^2 e^{it}$$
$$+n((1-p)+pe^{it})^{n-1} i^2 pe^{it} \quad \Rightarrow \quad \phi_X'(0) = (ip)^2 n(n-1) + ni^2 p.$$

Momentenformel 6.14 $\Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{1}{i}\phi_X'(0) = np$, $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{i^2}\phi_X''(0) = n(n-1)p^2 + np$.

Lösung 96.

Lösung:

(a) Es ist

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX_N}] = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} e^{itX_N} \cdot \mathbb{I}_{\{N=n\}}\Big].$$

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\underbrace{|e^{itX_N}|}_{=1} \cdot \mathbb{I}_{\{N=n\}}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}(N<\infty) = 1 < \infty,$$

$\Rightarrow$ Mit Satz von Fubini darf unendliche Summe und Erwartungswert vertauscht werden. $\Rightarrow$

$$\phi_X(t) \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[e^{itX_N} \cdot \mathbb{I}_{\{N=n\}}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[e^{itX_n} \cdot \mathbb{I}_{\{N=n\}}]$$
$$\overset{\text{Unabh.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}[e^{itX_n}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\phi_{X_n}(t).$$

Im Falle, dass alle X_n, $n \in \mathbb{N}$ identisch verteilt sind, folgt $\phi_{X_n} = \phi_{X_1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\phi_X(t) = \phi_{X_1}(t) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) = \phi_{X_1}(t) \cdot \mathbb{P}(N<\infty) = \phi_{X_1}(t).$$

Eindeutigkeitssatz 6.13 $\Rightarrow X$ hat die gleiche Verteilung wie X_1.

(b) X_1, X_2 unabhängig $\Rightarrow$ Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t) \cdot \phi_{X_2}(t) = \exp\Big(\lambda(e^{it}-1)\Big) \cdot \exp\Big(\mu(e^{it}-1)\Big) = \exp\Big((\lambda+\mu)\cdot(e^{it}-1)\Big) = \phi_{\text{Poi}(\lambda+\mu)}(t).$$

Eindeutigkeitssatz 6.13 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Poi}(\lambda+\mu)$.

Lösung 97.

Lösung:

(a) Es ist

$$\phi_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itS_n}] = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}X_k}] \overset{\text{Unabh.}}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{i\frac{t}{n}X_k}] \overset{\text{Ident. vert.}}{=} \mathbb{E}[e^{i\frac{t}{n}X_1}]^n = \phi_{X_1}\Big(\frac{t}{n}\Big)^n.$$

(b) Es gilt

$$\phi_{S_n}(t) \overset{(a)}{=} \phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)^n = \left(e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\right)^n = e^{-|t|} = \phi_{X_1}(t).$$

$\Rightarrow$ Für alle $t \in \mathbb{R}$: $\phi_{S_n}(t) \to \phi_{X_1}(t)$.

Stetigkeitssatz 6.8(i) $\Rightarrow X_n \overset{D}{\to} X_1$.

Starkes Gesetz $\Rightarrow$ Der Limes von S_n müsste $\mathbb{P}$-f.s. konstant und insbesondere $\mathbb{E}X_1$ sein. Ein Widerspruch zum starken Gesetz entsteht aber nicht, da die Voraussetzung $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ des starken Gesetzes verletzt ist:

$$\mathbb{E}|X_1| = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geq 2\int_1^\infty \frac{x}{\underbrace{1}_{\leq x^2}+x^2}\,\mathrm{d}x \geq 2\int_1^\infty \frac{x}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Auch die Erweiterung 3.10. ist nicht anwendbar, da $\mathbb{E}X_1^+ = \mathbb{E}X_1^- = \infty$).

(c) Es gilt

$$\phi_{S_n}(t) \overset{(a)}{=} \phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)^n = e^{-\frac{t^2}{2n}} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Der Limes entspricht der charakteristischen Funktion von $X \equiv 0$ ($\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[e^{it\cdot 0}] = 1$).

Stetigkeitssatz 6.8(i) $\Rightarrow S_n \overset{D}{\to} 0$.
Grenzwert konstant $\Rightarrow S_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$.
Das war zu erwarten, da das starke Gesetz in diesem Fall sogar $S_n \to 0$ f.s. liefert.

Lösung 98.

Lösung:

(a) P45(b) $\Rightarrow$ Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\phi_{Y_n}(t) = ((1-p_n) + p_n e^{it})^n.$$

Damit

$$\phi_{Y_n}(t) = ((1-p_n) + p_n e^{it})^n = \left(1 + np_n \cdot \frac{e^{it}-1}{n}\right)^n \overset{\text{Hinweis, } np_n \to c}{\to} \exp(c(e^{it}-1)) = \phi_{\mathrm{Poi}(c)}(t)$$

Stetigkeitssatz 6.8(i) $\Rightarrow Y_n \overset{D}{\to} \mathrm{Poi}(c)$.

(b) (i) Sei $Y \sim U[0,a]$. P45(a) $\Rightarrow$ Für $t \neq 0$ gilt:

$$\phi_{Y_n}(t) = \frac{e^{ia_n t}-1}{ia_n t} \to \frac{e^{iat}-1}{iat} = \phi_Y(t).$$

Für $t = 0$ ist $\phi_{Y_n}(0) = 1 \to 1 = \phi_Y(0)$.
Stetigkeitssatz 6.8(i) $\Rightarrow Y_n \overset{D}{\to} Y \sim U[0,a]$.

(ii) Angenommen, $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ wäre straff.
$\Rightarrow$ Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert $M \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{Y_n}([-M, M]) \geq 1 - \varepsilon = \frac{1}{2}$. Hier ist aber

$$\mathbb{P}^{Y_n}([-M, M]) = \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \mathbb{I}_{[-M,M]}(x) dx \overset{\text{für } a_n > M}{=} \frac{1}{a_n} \int_0^{M} dx = \frac{M}{a_n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

Widerspruch zu $\mathbb{P}^{Y_n}([-M, M]) \geq 1 - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow$ $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ nicht straff.

Würde $Y_n \xrightarrow{D} Y$ gelten mit einer ZV Y, so wäre $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ straff. Widerspruch. Also konvergiert Y_n nicht in Verteilung.

Homepage der Vorlesung:
`http://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss2020/`