Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

1. Präsenzblatt

Aufgabe P1 (Landau-Symbole).
Sei $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Folge von Zufallsvariablen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, welche Werte in einem reellen Vektorraum $\mathcal{X}$ mit Norm $\|.\|$ annimmt. Weiterhin sei eine Folge $a_n : \Omega \to (0, \infty)$ von positiven Zufallsvariablen auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum gegeben. Wir führen folgende Notation ein:

- $X_n = o_p(a_n)$, falls $\frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{p} 0$ für $n \to \infty$;
- $X_n = O_p(a_n)$, falls $\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, C > 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}\left(\frac{\|X_n\|}{a_n} > C\right) \leq \epsilon$.

Bemerkung: Eine Folge von Zufallsvariablen für die $X_n = O_p(1)$ gilt, heißt „straff“.
Zeigen Sie folgende Gleichheiten:

(a) $o_p(1) + o_p(1) = o_p(1)$,

(b) $(1 + o_p(1))^{-1} = O_p(1)$,

(c) $o_p(1) = O_p(1)$,

(d) $O_p(1) + O_p(1) = O_p(1)$,

(e) $O_p(1)o_p(1) = o_p(1)$,

(f) $o_p\left(O_p(1)\right) = o_p(1)$.

Hinweis:

- *Die Folgen von Zufallsvariablen in $o_p(1)$ oder $O_p(1)$ auf der linken Seite der Gleichung ergeben eine Folge mit entsprechender Eigenschaft auf der rechten Seite, z.B. erhalten wir für (iv), dass unter $X_n = O_p(1)$ und $Y_n = o_p(1)$, $X_n \cdot Y_n = o_p(1)$ gilt.*
- *Nehmen Sie für Gleichungen (ii) und (v) an, dass die Zufallsvariablen reell-wertig sind.*

Aufgabe P2.
Für die folgende Aufgabe verwenden wir das Lemma von Borel-Cantelli, welches besagt:
Sei $E_n \subseteq \Omega$ eine Folge von Ereignissen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und setze

$$\limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0.$$

(a) Sei X_n eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent zueinander sind:

(i) Es ist $X_n \xrightarrow{p}_{n\to\infty} 0$.

(ii) Jede Teilfolge X_{n_k} enthält eine Teilfolge $X_{n_{k_m}}$ (insgesamt also eine „Teil-Teilfolge"), so dass $X_{n_{k_m}} \to 0$, $m \to \infty$, fast sicher.

(b) Sei $a_n \in \mathbb{R}$ eine (deterministische) Folge. Wir wissen, dass $a_n \to 0$, $n \to \infty$, genau dann gilt, wenn jede Teilfolge a_{n_k} eine weitere Teilfolge $a_{n_{k_m}}$ enthält, die $a_{n_{k_m}} \to 0$, $m \to \infty$, erfüllt. Für eine Folge X_n von Zufallsvariablen (wobei die *gewöhnliche* Konvergenz durch die fast sichere Konvergenz ersetzt wird) gilt diese Aussage nicht mehr. Geben Sie hierfür ein Gegenbeispiel an.

Abgabe:
Dieses Blatt ist **nicht** abzugeben und
Es wird in den Übungsgruppen am 25./26.10.2021 besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`