UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

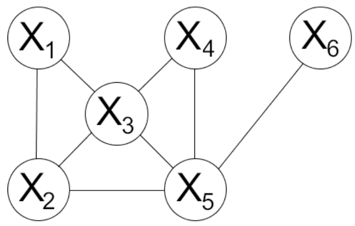
**Statistik II**
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

## 12. Übungsblatt

| Aufgabe 36 | Aufgabe 37 | Aufgabe 38 | Summe: |
|---|---|---|---|
| | | | |

Übungsgruppe: dienstags Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

**Aufgabe 36 (4 Punkte).**
Sei $X = (X_1, ..., X_6)$ ein Zufallsvektor, dessen Verteilung $\mathbb{P}^X$ durch eine R-Verteilung mit bedingtem Unabhängigkeitsgraphen




gegeben ist. Geben Sie jeweils an, ob die folgenden bedingten Unabhängigkeiten direkt (d.h. durch Einsetzen in die Definition) aus einer Markov-Eigenschaft gefolgert werden können. Falls mehrere Markov-Eigenschaften direkt die gewünschte Unabhängigkeit liefern, ist die schwächste anzugeben.

(a) $1 \perp\!\!\!\perp 5 \mid 3$ (b) $1 \perp\!\!\!\perp 5 \mid 2, 3$ (c) $1 \perp\!\!\!\perp 4. \mid 2, 3, 5, 6$ (d) $6 \perp\!\!\!\perp 1, 2, 3 \mid 5$
(e) $4 \perp\!\!\!\perp 1, 2, 6 \mid 3, 5$ (f) $6 \perp\!\!\!\perp 1 \mid 3$ (g) $1, 4 \perp\!\!\!\perp 6 \mid 2, 3, 5$

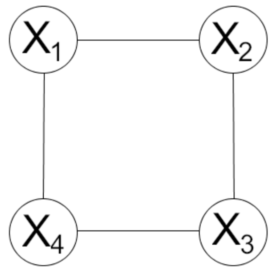
**Aufgabe 37 (4 Punkte).**
In der Vorlesung wurde mit dem Theorem von Hammersley-Clifford gezeigt, dass eine R-Verteilung $\mathbb{P}^X$ bzgl. eines Graphen $G = (V, E)$ folgende Eigenschaft erfüllt:

$$(P) \implies (F).$$

Wir wollen zeigen, dass die Aussage falsch wird, wenn wir die Annahme der R-Verteilung weglassen.
Betrachten Sie dazu den Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ mit Werten in $\{0, 1\}^4$, welcher den Wertepaaren

$$\begin{array}{cccc} (0,0,0,0), & (1,0,0,0), & (1,1,0,0), & (1,1,1,0), \\ (0,0,0,1), & (0,0,1,1), & (0,1,1,1), & (1,1,1,1). \end{array}$$

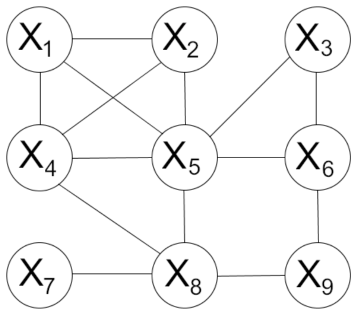
jeweils Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ zuweist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^X$ die Eigenschaft (P) bzgl. des Graphen




besitzt, aber nicht die Eigenschaft (F).
*Hinweise: Zeigen Sie zuerst, dass $X_1$ gegeben $(X_2, X_4) = (0, 1)$ konstant ist. Folgern Sie daraus die Unabhängigkeit von $X_1, X_3$ gegeben $(X_2, X_4) = (0, 1)$. Gehen Sie für alle anderen Kombinationen von $(X_2, X_4)$ ähnlich vor.*
*Um (F) zu widerlegen, nehmen Sie an, dass eine Faktorisierung der Dichte $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vorläge, berechnen Sie dann $f(0,0,0,0)$, $f(0,0,1,0)$, $f(0,0,1,1)$, $f(1,1,1,0)$ und leiten Sie daraus Eigenschaften der Faktoren her, welche Sie zum Widerspruch führen können.*

**Aufgabe 38 (4 Punkte).**

(a) Sei $\mathbb{P}^X$ eine R-Verteilung, welche bzgl. dem Graphen




die Eigenschaft (P) besitzt. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^X$ bzgl. des Graphens die Eigenschaft (F) erfüllt und geben Sie eine Faktorisierung der Dichte bzgl. der (maximalen) Cliquen an.

(b) Sei $\mathbb{P}^X$ eine Verteilung auf $[0, 1]^4$ mit Dichte

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \exp(c + x_1 + x_3 + x_1x_2 + x_2x_3x_4)$$

bzgl. $\lambda^4$ ($\lambda$ als Lebesguemaß, $c$ eine Normierungskonstante). Geben Sie einen Graphen mit möglichst wenig Kanten an bzgl. dem $\mathbb{P}^X$ die Eigenschaft (F) besitzt. Geben Sie mittels (G) alle nichttrivialen bedingten Unabhängigkeiten an, welche direkt aus dem Graphen gefolgert werden können.

---

**Abgabe:**
In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **04.02.2022, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

**Homepage der Vorlesung:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`