UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

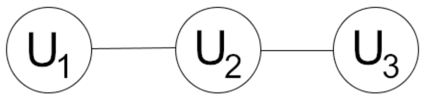
11. Übungsblatt

Aufgabe 33	Aufgabe 34	Aufgabe 35	Summe:

Übungsgruppe: dienstags Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 33 (3 Punkte).

Wir wollen die Abhängigkeit der Körpergröße von Opa, Vater und Sohn modellieren. Dazu bezeichnen wir diese Größen mit jeweils U_1, U_2, U_3 und nehmen an, dass diese gemeinsam normalverteilt sind mit $U_i \sim N(180, 10^2)$.
Die U_i sollen folgenden bedingten Unabhängigkeitsgraphen haben:



Sei nun $\text{corr}(U_1, U_2) = \text{corr}(U_2, U_3) = \frac{1}{2}$. Geben Sie die Kovarianzmatrix von (U_1, U_2, U_3) an.

Aufgabe 34 (4 + 1.5 + 1.5 + 2 Punkte).

Seien X, Y, W, Z Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x, y, w, z)$ bezüglich eines σ-endlichen Maßes $\mu_X \otimes \mu_Y \otimes \mu_W \otimes \mu_Z$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der bedingten Unabhängigkeit:

(a) (C1) „Symmetrie“: $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z \Rightarrow Y \perp\!\!\!\perp X \mid Z$

(C2') „Dekomposition“: $(X, W) \perp\!\!\!\perp Y \mid Z \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$

(C3') „Vereinigung“: $(X, W) \perp\!\!\!\perp Y \mid Z \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y \mid (W, Z)$

(C4) „Kontraktion“: $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ und $X \perp\!\!\!\perp W \mid (Y, Z) \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp (W, Y)|Z$.
Hinweis: Benutzen Sie die äquivalente Charakterisierung der bedingten Unabhängigkeit $X \perp\!\!\!\perp Y|Z \iff f(x \mid y, z) = f(x \mid z)$ $\mu_X \otimes \mu_Y \otimes \mu_Z$-f.s.

(b) Sei h eine messbare Funktion. Zeigen Sie:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z \iff (X, h(X)) \perp\!\!\!\perp Y \mid Z.$$

(c) Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (b) beweisen Sie:

(C2) $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ und $U = h(X) \implies U \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$

(C3) $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ und $U = h(X) \implies X \perp\!\!\!\perp Y \mid (Z, U)$

(d) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass bei R-Verteilungen mit (positiver) Dichte $f > 0$ die „Schnitteigenschaft“ (C5) gilt:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \mid (W, Z) \quad \text{und} \quad X \perp\!\!\!\perp W \mid (Y, Z) \quad \implies \quad X \perp\!\!\!\perp (Y, W) \mid Z$$

Zeigen Sie, dass auf die Annahme einer positiven Dichte nicht verzichtet werden kann, indem Sie Zufallsvariablen mit $X, Z \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bin}(1, \frac{1}{2})$ und $Y = W = X$ betrachten.

Aufgabe 35 (4 Punkte).

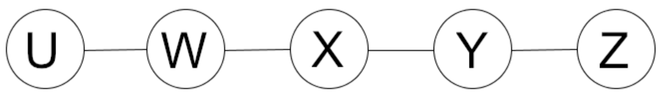
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine beliebige Verteilung $\mathbb{P}^X$ und einen beliebigen Graphen $G = (V, E)$ die folgenden Implikationen für die Markov-Eigenschaften gelten:

$$(G) \quad \implies \quad (L) \quad \implies \quad (P)$$

Wir wollen zeigen, dass die Umkehrungen im Allgemeinen nicht wahr sind.

(a) Seien dazu X, Y, Z Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Bin}(1, \frac{1}{2})$ und $X = Y = Z$. Zeigen Sie, dass diese die paarweise Markov-Eigenschaft (P), aber nicht die lokale Markov-Eigenschaft (L) bzgl. folgenden Graphen erfüllen:

(b) Weiter seien X, Y, Z, W, U Zufallsvariablen mit $U, Z \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bin}(1, \frac{1}{2})$ und $W = U$, $Y = Z$, $X = W \cdot Y$. Zeigen Sie, dass diese die lokale Markov-Eigenschaft (L), aber nicht die globale Markov-Eigenschaft (G) bzgl. folgenden Graphen erfüllen:



Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **28.01.2022, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`