UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

10. Übungsblatt

Aufgabe 30	Aufgabe 31	Aufgabe 32	Summe:

Übungsgruppe: dienstags Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 30 (4 Punkte + 2 Bonuspunkte).

Sei $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine subkonvexe Verlustfunktion und $X \sim \mathcal{N}(\theta, \Sigma)$, wobei die (positiv definite) Kovarianzmatrix bekannt ist. Ein möglicher Schätzer (basierend auf genau einer Beobachtung) für θ ist durch $\hat{\theta} = X$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\inf_{\hat{\theta}} \sup_{\theta \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_\theta \ell(\hat{\theta} - \theta) \geq \mathbb{E}\ell(Z)$$
mit $Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen die Aufgabe auch anhand des quadratischen Verlustes lösen. Nutzen Sie ohne Beweis Anderson's Lemma:
„Ist $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ subkonvex, so gilt $\int \ell \, d\mathcal{N}(0, \Sigma) \leq \int \ell \, d(\mathcal{N}(0, \Sigma) * \mathbb{Q})$ für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}^d$. Hierbei bezeichnen wir mit „$*$“ die Faltung zweier Maße. Bestimmen Sie dann den Bayes-Schätzer für θ, indem Sie folgendes Resultat ohne Beweis verwenden:
„Sei $\Theta = \mathbb{R}^d$. Unter der A-Priori-Verteilung $\mathbb{P}^\Theta = \mathcal{N}(0, \Sigma^*)$ gilt $\mathbb{P}^{\Theta|X=x} = \mathcal{N}((\Sigma^{*-1} + \Sigma^{-1})^{-1}\Sigma^{-1}x, (\Sigma^{*-1} + \Sigma^{-1})^{-1})$ für die A-Posteriori-Verteilung.“

(b) Zeigen Sie eine vereinfachte Formulierung von Anderson's Lemma: Sei $Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Dann gilt
$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\ell(Z + x) = \mathbb{E}\ell(Z).$$
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgendes Resultat verwenden:
„Sei $\lambda \in (0, 1)$ und $f, g, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nicht-negative Funktionen mit $h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt
$$\int h(x)\, dx \geq \Big(\int f(x)\, dx \Big)^{1-\lambda} \Big(\int g(x)\, dx \Big)^\lambda .“$$

Aufgabe 31 (4 Punkte).

Wir werfen drei Mal einen Würfel (mit sechs Seiten) und modellieren folgenden Sachverhalt: Sei $\Omega := E^3$ mit $E := \{1, ..., 6\}$ und definiere das Maß $\mu = \zeta^3$ auf Ω, wobei ζ das Zählmaß auf E ist, also $\zeta(A) := |A|$ für $A \subseteq E$. Jeder Wurf wird dann mittels einer Projektion (bzgl. der Koordinaten) dargestellt, d.h. $W_k(\omega_1, \omega_2, \omega_3) := \omega_k$ für $k = 1, 2, 3$. Die gemeinsame Verteilung von (W_1, W_2, W_3) ist durch $\mathbb{P}^{W_1,W_2,W_3}(\{x\}) := \frac{1}{6^3}$ für alle $x \in \{1, ..., 6\}^3$ gegeben.

Gehen Sie bezüglich des Informationsflusses vor und analysieren Sie, ob $X \perp\!\!\!\perp Y$ und $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ (oder auch nicht) bei den folgenden Fällen gilt:

(a) $X = W_1$, $Y = W_2$, $Z = W_1 + W_2$

(b) $X = W_1 + W_2$, $Y = W_2 + W_3$, $Z = W_2$

Aufgabe 32 (4 Punkte).

Seien $X, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$Y := aX + \varepsilon_1, \qquad Z := bX + \varepsilon_2, \qquad W := X + Y + \varepsilon_3.$$

(a) Geben Sie die Inverse von $\text{Var}(X, Y, Z, W)$ an (Sie dürfen auch ein Computer-Algebra-System verwenden). Skizzieren Sie anschließend den bedingten Unabhängigkeitsgraphen von den Variablen (X, Y, Z, W).

(b) Interpretieren Sie den Graphen, d.h. folgern Sie, welche Zufallsvariablen nur über andere Zufallsvariablen voneinander abhängig sind.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **21.01.2022, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`