Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

9. Übungsblatt

Aufgabe 26	Aufgabe 27	Aufgabe 28	Aufgabe 29	Summe:

Übungsgruppe: dienstags Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 26 (Wiederholung: Le-Cam-Theorie, 4 Punkte).
Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{P}_n := \mathcal{N}(0,1)^n$, $\mathbb{Q}_n := \mathcal{N}(\mu_n,1)^n$ zwei Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}_n \lhd\rhd \mathbb{Q}_n \iff (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = O(n^{-1/2}).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(\mathrm{d}\mathbb{P}_n/\mathrm{d}\mathbb{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist. Verwenden Sie dann das erste Lemma von Le Cam (inkl. Bemerkung 3.5 bzw. Aufgabe 15 (b)). Sie dürfen ohne Beweis ausnutzen, dass eine Folge $\mathcal{N}(a_n, b_n^2)$ von Normalverteilungen genau dann schwach konvergiert, wenn $a_n \to a \in \mathbb{R}$ und $b_n \to b \in \mathbb{R}$; der Grenzwert ist folglich $\mathcal{N}(a, b^2)$.

Aufgabe 27 (4 Bonuspunkte).
Gegeben sei eine Familie von Verteilungen $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$, mit Dichten f_θ bezüglich eines σ-endlichen Maßes μ. Wir bezeichnen mit $I(\theta)$ die Fisher-Informationsmatrix, wobei $\theta = (\theta_1, ..., \theta_d)$. Unter der Annahme, dass alle Regularitätsbedingungen aus Satz 6.1 (Informations-Ungleichung; Frechet-Cramer-Rao) erfüllt werden, zeigen Sie:

(a) Für jeden erwartungstreuen Schätzer S der ersten k Parameter $(\theta_1, ..., \theta_k)$ mit $k \leq d$ gilt
$$\mathrm{Var}(S) \geq \left(I(\theta)^{-1}\right)_{i,j=1,...,k}.$$

(b) Unter der Kenntnis von $\theta_{k+1}, ..., \theta_d$ gilt für jeden erwartungstreuen Schätzer S von $(\theta_1, ..., \theta_k)$ mit $k < d$,
$$\mathrm{Var}(S) \geq \left(I(\theta)_{i,j=1,...,k}\right)^{-1}.$$

Aufgabe 28 (6 Punkte).
Es seien Zufallsvariablen gegeben durch

$$((X_1,Y_1), ..., (X_n,Y_n)) \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}\right)^n =: \mathbb{P}_\theta^n =: \mathbb{P}_{n,\theta}$$

mit den Parametern $\theta := (\mu_1, \mu_2, \rho)$.

(a) Nehmen Sie zunächst an, ρ sei bekannt. Nun kann

(i) μ_2 einmal bekannt und

(ii) μ_2 einmal unbekannt sein.

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für μ_1 in den jeweiligen Fällen durch

(i) $\hat{\mu}_1 = \bar{X} - \rho\left(\bar{Y} - \mu_2\right)$ bzw.

(ii) $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$

gegeben ist, wobei $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $\bar{Y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$. Bestimmen Sie auch die Varianzen. Erklären Sie anschaulich: Ist das Wissen über μ_2 nützlich, wenn μ_1 geschätzt wird? Welche Probleme bzw. Änderungen in der Qualität des Schätzers erwarten Sie, wenn ρ unbekannt bleibt?

(b) Bestimmen Sie die Cramer-Rao-Schranke für erwartungstreue Schätzer von μ_1 in den folgenden vier Fällen:

(i) ρ und μ_2 sind bekannt,

(ii) ρ ist unbekannt und μ_2 bekannt,

(iii) ρ ist bekannt und μ_2 unbekannt,

(iv) ρ und μ_2 sind unbekannt.

Nutzen Sie dazu Aufgabe 27. Stimmen die Ergebnisse mit Ihrer Vermutung (bzw. Erkenntnis) aus Teilaufgabe (a) überein? Wie schneiden die Schätzer also qualitativ tatsächlich ab?

Hinweis: Die Lebesgue-Dichte einer multivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ auf $\mathbb{R}^d$ ist gegeben durch:

$$f_{\mu,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right).$$

Die Fisherinformation der Verteilung $\mathbb{P}_\theta$ lautet

$$I(\theta) = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29 (6 Punkte).

Sei $(X_1, ..., X_n) \sim U[0,\theta]^n := \mathbb{P}_\theta^n =: \mathbb{P}_{n,\theta}$ und p_θ bezeichne die Dichte von $\mathbb{P}_{n,\theta}$ bzgl. des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_n$ für θ und bestimmen Sie die zugehörige Varianz $\operatorname{Var}(\hat{\theta}_n)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\theta}_n$ nicht für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Cramer-Rao-Schranke einhält. Welche Voraussetzung von Satz 6.1 wird verletzt?

(c) Nennen Sie jeweils eine Bedingung, die an die Dichte mit beschränktem bzw. unbeschränktem Träger gestellt werden kann, damit die Regularitätsbedingungen in Satz 6.1 erfüllt werden.

Abgabe:

In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **14.01.2022, 11:00 Uhr**.

(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Wir wünschen Ihnen frohe Feiertage und einen guten Rutsch in das neue Jahr!

Homepage der Vorlesung:

`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`