UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

8. Übungsblatt

Aufgabe 23	Aufgabe 24	Aufgabe 25	Summe:

Übungsgruppe: dienstags Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 23 (4 Punkte).

Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ differenzierbar, so dass $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ und $\tilde{I} := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \cdot f(x)dx < \infty$. Wir beobachten nun Realisierungen unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$, $n = n_1 + n_2$, derart, dass

$$X_1, ..., X_{n_1} \sim f(x - \theta), \quad X_{n_1+1}, ..., X_n \sim f(x).$$

Sei $\mathbb{P}_{n,\theta} := \mathbb{P}^{(X_1,...,X_n)}$ die gemeinsame Verteilung. Wir wollen folgendes Testproblem untersuchen:

$$H : \theta = 0 \text{ gegen } K : \theta > 0.$$

Dazu betrachten wir den Test $\phi_n(X) := \mathbb{1}_{\{T_n > c_n\}}$ mit der Median-Teststatistik (vgl. Aufgabe 22) $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=n_1+1}^{n} \mathbb{1}_{\left\{R_{ni} < \frac{n+1}{2}\right\}}$, wobei c_n so gewählt ist, dass der Test asymptotisch das Niveau α einhält. Zeigen Sie, dass im Falle $\frac{n_1}{n} \to \lambda \in (0, 1)$ für die asymptotische Güte des Tests gilt:

$$\beta_{\phi_n}\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right) \to \Phi\left(-u_{1-\alpha} + 2h\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \int_{\{y:\, F(y) < \frac{1}{2}\}} f'(y)dy\right).$$

Unter der zusätzlichen Annahme $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ gilt $\int_{\{y:\, F(y) < \frac{1}{2}\}} f'(y)dy = f\left(F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Können Sie anschaulich erklären, warum die asymptotische Güte diese Form hat?
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\forall h \in \mathbb{R} : \log \frac{d\mathbb{P}_{n,\frac{h}{\sqrt{n}}}}{\mathbb{P}_{n,0}}(X) = h\sqrt{\lambda} \frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{i=1}^{n_1} \left(-\frac{f'}{f}(X_i)\right) - \frac{h^2}{2} \lambda \cdot \tilde{I} + o_P(1).$$

Aufgabe 24 (4 Punkte).

Seien $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ zwei Lebesgue-Dichten mit jeweils den Verteilungen F und G, wobei $\tilde{I} := \int_{\mathbb{R}} \frac{(f(x)-g(x))^2}{f(x)} \mathrm{d}x < \infty$. Nehmen Sie an, dass $G \leq F$ und $n := n_1 + n_2$ mit $\frac{n_1}{n} \to \lambda \in (0, 1)$. Wir betrachten nun unabhängige Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ derart, dass

$$X_1, ..., X_{n_1} \sim (1 - \theta) \cdot f(x) + \theta \cdot g(x), \quad X_{n_1+1}, ..., X_n \sim f(x).$$

Sei $\mathbb{P}_{n,\theta}$ die gemeinsame Verteilung von $X_1, ..., X_n$. Wir wollen folgendes Testproblem untersuchen:

$$H : \theta = 0 \text{ gegen } K : \theta > 0.$$

Zeigen Sie, dass der Wilcoxon-Test ϕ_n zum Niveau $\alpha > 0$ dazu folgende asymptotische Güte besitzt:

$$\beta_{\phi_n}\Big(\frac{h}{\sqrt{n}}\Big) \to \Phi\Big(- u_{1-\alpha} + h\sqrt{12\lambda(1-\lambda)} \int_{\mathbb{R}} (F(x) - G(x)) f(x) dx \Big).$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\forall h > 0 : \log \frac{d\mathbb{P}_{n,\frac{h}{\sqrt{n}}}}{\mathbb{P}_{n,0}}(X) = h\sqrt{\lambda}\frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{g}{f}(X_i) - 1 \right) - \frac{h^2}{2}\lambda \cdot \tilde{I} + o_p(1).$$

Aufgabe 25 (4 Punkte).

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein weiteres Mal die Situation von Aufgabe 24, einem Zweistichproben-Mischungsmodell, und vergleichen in diesem Kontext den Wilcoxon-Test mit dem t-Test. Unter der zusätzlichen Annahme $\sigma^2 := \int x^2 f(x) dx < +\infty$ können wir zeigen, dass der t-Test ϕ_n^t zum Niveau α folgende asymptotische Güte aufweist:

$$\beta_{\phi_n^t}\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right) \to \Phi\left(-u_{1-\alpha} + \frac{h}{\sigma}\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \int (F(x) - G(x)) dx \right).$$

Bestimmen Sie die asymptotisch relative Effizienz $\mathrm{ARE}(\phi_n^W, \phi_n^t)$ des Wilcoxon-Test im Vergleich zum t-Test. Gibt es eine positive untere Schranke für die asymptotisch relative Effizienz wie im Beispiel des Zwei-Stichproben-Test (vgl. Proposition von Hodges-Lehmann)?

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **17.12.2021, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`