UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

6. Übungsblatt

Aufgabe 17	Aufgabe 18	Aufgabe 19	Summe:

Übungsgruppe (Mo oder Di): Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 17 (4 Punkte).
Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung (vgl. Online-Skript Lemma 3.3):

„Für die schwache Konvergenz gilt:

(i) $X_n \overset{\mathbb{P}_n}{\Rightarrow} X,\, Y_n \overset{\mathbb{P}_n}{\to} c \quad \Longrightarrow \quad (X_n, Y_n) \overset{\mathbb{P}_n}{\Rightarrow} (X, c)$.

(ii) $X_n \overset{\mathbb{P}_n}{\Rightarrow} X \quad \Longleftrightarrow$ Für alle stetigen (nicht notwendigerweise beschränkten) Funktionen $f \geq 0$ gilt $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_n f(X_n) \geq \mathbb{E} f(X)$."

Aufgabe 18 (4 Punkte).
Gegeben seien die Beobachtungen $(X_1, ..., X_n) \sim \mathbb{P}_{n,\theta} := U[0,\theta]^n$ und wir wollen das Testproblem

$$H : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad K : \theta < \theta_0.$$

Wir betrachten dazu den (gleichmäßig besten) Test

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1, & T_n > c_n \\ 0, & T_n \leq c_n \end{cases}$$

mit $T_n := n \cdot (\theta_0 - X_{(n)})$ und $X_{(n)} := \max\{X_1, ..., X_n\}$ untersuchen. In dieser Aufgabe approximieren wir die Güte des Testes mit der Le-Cam-Theorie. In Aufgabe 11 auf dem 4. Übungsblatt haben wir folgende zwei Eigenschaften gezeigt:

(i) $T_n \overset{\mathbb{P}_{n,\theta_0}}{\Longrightarrow} T$ mit $T \sim \text{Exp}(\frac{1}{\theta_0})$

(ii) Für alle $h > 0$ gilt $\frac{d\mathbb{P}_{n,\theta_0 - \frac{h}{n}}}{d\mathbb{P}_{n,\theta_0}} \overset{\mathbb{P}_{n,\theta_0}}{\Longrightarrow} \exp\left(\frac{h}{\theta_0}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{T \geq h\}}$.

Benutzen Sie diese Resultate, um die asymptotische Güte des Testes zu bestimmen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zuerst $\mathbb{P}_{n,\theta_0 - \frac{h}{n}} \lhd \mathbb{P}_{n,\theta_0}$.

(b) Zeigen Sie mit dem 3. Lemma von Le Cam, dass $T_n \overset{\mathbb{P}_{n,\theta_0-\frac{h}{n}}}{\Longrightarrow} L$. Bestimmen Sie die Verteilung von L.

(c) Wir nehmen $c_n \to c$ an (Sie müssen diese Folge nicht bestimmen). Berechnen Sie den Grenzwert der Gütefunktion $\beta_{\phi_n}\left(\theta_0 - \frac{h}{n}\right) := \mathbb{P}_{\theta_0-\frac{h}{n}}(\phi_n = 1)$.

Bemerkung: Die Aufgabe soll bei einer Situation, in welcher die Verteilungsfamilie nicht LAN ist, zeigen, wie das 3. Lemma von Le Cam zur Approximation der Güte verwendet werden kann.

Aufgabe 19 (4 Punkte).

Sei $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit Lebesgue-Dichten $p_\theta(x) := g(x-\theta)$, wobei $g > 0$ eine differenzierbare und symmetrische Dichte(-funktion) ist. Ferner sei $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ differenzierbar im quadratischen Mittel für alle θ, mit $\dot{l}_\theta(x) = -\frac{g'}{g}(x-\theta)$. Wir nehmen außerdem an, dass g quadratisch integrierbar ist und Varianz σ^2 hat. An den Rändern von g gelte zusätzlich $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} xg(x) = 0$.

Für $X = (X_1, ..., X_n) \sim \mathbb{P}_{n,\theta} := \mathbb{P}_\theta^n$ betrachten wir das Testproblem

$$H : \theta \leq 0 \text{ versus } K : \theta > 0$$

zum Niveau α und wollen folgende Tests ($i = 1, 2$) verwenden:

$$\phi_{n,i}(X) = \begin{cases} 1, & T_{n,i} > d_{n,i}, \\ 0, & T_{n,i} \leq d_{n,i}, \end{cases}$$

wobei $T_{n,i}$ jeweils durch

$$T_{n,1} := \frac{\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}}, \qquad T_{n,2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i>0\}}$$

gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie $d_{n,i}$, $i = 1, 2$, so, dass der dazugehörige Test $\phi_{n,i}$ asymptotisch das Niveau α einhält.

(b) Bestimmen Sie die asymptotisch relative Effizienz ARE$(2, 1)$ von $\phi_{n,2}$ bzgl. $\phi_{n,1}$.

(c) Bestimmen Sie eine Teststatistik, die asymptotisch den optimalen Test ϕ_n^* liefert.

(d) Bestimmen Sie die asymptotisch relative Effizienz spezifisch für die Normalverteilung und die Laplace-Verteilung, d.h.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \text{ bzw. } g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\Big(-\sqrt{2}|x|\Big) \quad (\text{mit } g'(0) = 0).$$

Entscheiden Sie in beiden Situationen, welche der beiden Tests Sie bevorzugen würden. Ist in den beiden Situationen zumindest einer der beiden Tests optimal?

Abgabe:

In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **03.12.2021, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Homepage der Vorlesung:

`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`