UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

5. Übungsblatt

Aufgabe 14	Aufgabe 15	Aufgabe 16	Summe:

Übungsgruppe (Mo oder Di): Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 14 (4 Punkte).
Beweisen Sie folgende Proposition aus der Vorlesung:

Sei $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und es existiere ein σ-endliches Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$, welches alle $\mathbb{P}_\theta$ dominiert; insbesondere gibt es also Dichten p_θ von $\mathbb{P}_\theta$ bezüglich μ. Wir nehmen an, dass $\theta \mapsto \sqrt{p_\theta(x)}$ stetig differenzierbar für alle x und $I(\theta) = \int_\Omega \frac{\nabla p_\theta(x)}{p_\theta(x)} \cdot \frac{\nabla p_\theta(x)^T}{p_\theta(x)} p_\theta(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ stetig ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\theta \mapsto \sqrt{p_\theta(x)}$ differenzierbar im quadratischen Mittel mit $\dot{\ell}_\theta(x) = \frac{\nabla p_\theta(x)}{p_\theta(x)}$ für alle $\theta \in \mathrm{Int}(\Theta)$ ist.
Hinweis: Seien $f_n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen mit den Eigenschaften $f_n \to f$ μ-f.s. und $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu$. Dann gilt $\int |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$, $n \to \infty$. Sie dürfen die Aussage ohne Beweis verwenden. Liefern Sie zusätzlich den dazugehörigen Beweis, können darauf bis zu 2 Bonuspunkte vergeben werden.

Aufgabe 15 (6 Punkte).

(a) Untersuchen Sie, ob $\mathbb{P}_n \lhd \mathbb{Q}_n$ oder $\mathbb{Q}_n \lhd \mathbb{P}_n$ (bzw. weder noch) in den folgenden Situationen gilt:

(i) $\mathbb{P}_n = U[0, 1]$ und $\mathbb{Q}_n = U\left[0, 1 + \frac{1}{n}\right]$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

(ii) $\mathbb{P}_n = U[0, 1]^n$ und $\mathbb{Q}_n = U\left[0, 1 + \frac{1}{n}\right]^n$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

(b) Seien $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbb{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer Folge von Messräumen $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$. Betrachten Sie die beiden Aussagen:

(i) Gilt $U_n = \frac{d\mathbb{P}_n}{d\mathbb{Q}_n} \overset{\mathbb{Q}_n}{\Longrightarrow} U$, dann ist $\mathbb{P}(U > 0) = 1$.

(ii) Gilt $V_n = \frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}_n} \overset{\mathbb{P}_n}{\Longrightarrow} V$, dann ist $\mathbb{E}V = 1$.

Zeigen Sie *ohne* Zuhilfenahme von Bemerkung 3.5, dass (i) gerade (ii) impliziert; d.h. aus (i) gerade $\mathbb{Q}_n \lhd \mathbb{P}_n$ folgt (vgl. Bemerkung 3.5 (ii)).

Hinweis: Finden Sie zu erst ein Wahrscheinlichkeitsmaß, welches $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{Q}_n$ (gleichzeitig) dominiert. Nutzen Sie dann den Satz von Prohorov.
Betrachten Sie weiter Funktionen der Form $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, $w \mapsto (2-w)f(w/(2-w))$ auf $[0,2)$ und $g(2) = 0$, wobei f eine stetige und beschränkte Funktion darstellt. Berechnen Sie dann $\mathbb{P}(U = 0)$ mittels dominierter Konvergenz. Eine ähnliche Vorgehensweise liefert $\mathbb{E}V$.

Aufgabe 16 (4 Punkte).

Seien $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße und $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{P} \lhd \mathbb{Q} \iff \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$.

(b) $\|\mathbb{P}_n - \mathbb{Q}_n\|_{TV} \to 0 \implies \mathbb{P}_n \lhd \mathbb{Q}_n$. Finden Sie ein Gegenbeispiel dafür, dass die Rückrichtung im Allgemeinen nicht gilt.
Hinweis: Betrachten Sie zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, welche nur zwei festen Punkten eine Masse zuordnet.

Hinweis: Die „total variation" ist definiert als $\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\|_{TV} := \sup_{A\in\mathcal{A}} |\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)|$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **26.11.2021, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`