UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

4. Übungsblatt

Aufgabe 11	Aufgabe 12	Aufgabe 13	Summe:

Übungsgruppe (Mo oder Di): Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 11 (4 Punkte).
Sei $\mathbb{P}_\theta = U[0,\theta]$, $\theta > 0$ eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,\theta]$ und $\mathbb{P}_{n,\theta} := \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta$ das Produktmaß. Für ein $\theta_0 > 0$ seien weiterhin $X_1, ..., X_n \sim \mathbb{P}_{\theta_0}$ unabhängige Beobachtungen gegeben. Wir definieren nun $X_{(n)} := \max\{X_1, ..., X_n\}$ sowie $Z_n := n \cdot (\theta_0 - X_{(n)})$. Zeigen Sie, dass $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, wobei $Z \sim \exp\left(\frac{1}{\theta_0}\right)$. Folgern Sie für $h > 0$, dass

$$\frac{d\mathbb{P}_{n,\theta_0 - \frac{h}{n}}}{d\mathbb{P}_{n,\theta_0}} \xrightarrow{d,\mathbb{P}_{n,\theta_0}} e^{\frac{h}{\theta_0}} \mathbb{1}_{\{Z \geq h\}}.$$

Aufgabe 12 (6 Punkte).
Wir betrachten einen AR(1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ mit Parameter $a \in (-1,1)$,

$$X_t \;=\; aX_{t-1} + \varepsilon_t,\; t \in \mathbb{Z},$$

wobei $X_0 := 0$ und $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichte g ist. Sei $G(x) := \log g(x)$. Es wird zusätzlich vorausgesetzt, dass

(i) g dreimal stetig differenzierbar ist,

(ii) $\lim_{|x|\to\infty} |g(x)| = 0$ und $\lim_{|x|\to\infty} |g'(x)| = 0$,

(iii) $\tau := \mathbb{E}(G'(\varepsilon_t)^2) < \infty$.

Wir nehmen nun an, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein stationärer und ergodischer Prozess mit stationärer Dichte f_a ist und die Bedingungen

$$\log f_{a+\frac{h}{\sqrt{n}}}(X_1) - \log f_a(X_1) = o_p(1),$$

$\sigma_X^2 := \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ sowie $\mathbb{E}(|G'(\varepsilon_2)X_1|^3) < \infty$ erfüllt werden. Als letztes gelte für alle $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{t=2}^n G_{h,n}^{***}(X_{t-1}, X_t)|X_{t-1}|^3 = o_p(1),$$

wobei $G^{***}_{h,n}(x,y) := \sup_{u\in[y-(a+\frac{h}{\sqrt{n}})x, y-ax]} |G'''(u)|$.
Zeigen Sie, dass dieses Modell in $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ mit der zentralen Folge

$$Z_n := \frac{1}{\tau \cdot \sigma_X^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=2}^{n} -G'(\varepsilon_t) X_{t-1}$$

LAN ist. Orientieren Sie sich an der Vorlesung und verwenden Sie an geeigneter Stelle eine Taylorreihen-Entwicklung.

Hinweis: Die folgenden Resultate dürfen ohne Beweis verwendet werden.

- *Die Folge* $(\epsilon_t, X_{t-1})_{t\in\mathbb{N}}$ *ist stationär und ergodisch.*
- *Sei* $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *stationär und ergodisch, und* f *messbar. Dann ist* $(f(Y_t))_{t\in\mathbb{N}}$ *stationär und ergodisch.*
- ***Ergodensatz**: Sei* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *stationär und ergodisch mit* $\mathbb{E}[X_1] < \infty$*, dann folgt die stochastische Konvergenz* $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{p} \mathbb{E}(X_1)$.
- ***Zentraler Grenzwertsatz für Martingaldifferenzfolgen**: Ist* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *eine Martingaldifferenzfolge bezüglich einer geeigneten Filtration* $\mathcal{F}_t$*, also* $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$*, und gelten die Bedingungen* $n^{-\frac{3}{2}}\sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}[|X_t|^3] \xrightarrow{p} 0$ *sowie* $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) \xrightarrow{p} s^2$*, so haben wir* $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, s^2)$.

Aufgabe 13 (4 Punkte).

Gegeben sei eine Familie $\{\mathbb{P}_\sigma : \sigma > 0\}$ von Verteilungen auf $\mathbb{R}$ mit Lebesgue-Dichten $p_\sigma(x) = g\big(\frac{x}{\sigma}\big) \cdot \frac{1}{\sigma}$, wobei g stetig differenzierbar und $g > 0$ ist.

(a) Formulieren Sie eine Integrabilitätsbedingung für g derart, dass $\{\mathbb{P}_\sigma : \sigma > 0\}$ differenzierbar im quadratischen Mittel ist. Folgern Sie, dass die Folge $\mathbb{P}_{n,\sigma} = \mathbb{P}_\sigma^n$ LAN für alle $\sigma_0 > 0$ ist. Geben Sie die zugehörige zentrale Folge an.

(b) Zeigen Sie anhand von Teilaufgabe (a), dass $\mathbb{P}_{n,\sigma} = \mathcal{N}(0, \sigma^2)^n$ LAN für alle $\sigma_0 > 0$ ist und ermitteln Sie die zugehörige zentrale Folge.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Identität $\int_{\mathbb{R}} (-x^2+1)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)\mathrm{d}x = 2$ *verwenden.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **19.11.2021, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`