Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

2. Übungsblatt

Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6	Summe:

Übungsgruppe (Mo oder Di): Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei $Z_n : \Theta \to \mathbb{R}^k$ eine Folge von zufälligen Funktionen, $Z : \Theta \to \mathbb{R}^k$ eine deterministische und stetige Funktion, wobei $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Zusätzlich nehmen wir an, dass Z_n und Z folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) $\sup_{\theta\in\Theta} |Z_n(\theta) - Z(\theta)| = o_p(1)$;

(ii) Z ist stetig und $\theta_0 \in \Theta$ ist die einzige Nullstelle von Z;

(iii) Θ ist kompakt mit $\theta_0 \in \mathrm{Int}(\theta_0)$.

Sei $\hat{\theta}_n := \arg\min_{\theta\in\Theta} \|Z_n(\theta)\|$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$.

Sei Z_n nun differenzierbar mit Ableitung ∇Z_n (die Komponente i, j beinhaltet die Ableitung der i-ten Komponente von Z_n bezüglich θ_j) und es gelten zusätzlich

(iv) $\sqrt{n} Z_n(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{p} 0$, $\sqrt{n} Z_n(\theta_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, I(\theta_0))$ sowie

(v) $\nabla Z_n(\theta_n^*) \xrightarrow{p} V(\theta_0)$ für beliebige Folgen $\theta_n^* \xrightarrow{p} \theta_0$ und einer invertierbaren Matrix $V(\theta_0)$.

(b) Beweisen Sie unter den erweiterten Annahmen, dass

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, V(\theta_0)^{-1} I(\theta_0) (V(\theta_0)^{-1})'\right)$$

Bemerkung: Ein solcher Schätzer wird auch als Z-Schätzer bezeichnet.

Aufgabe 5 (4 Punkte).

Seien $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen, die auf $[a, b]$ gleichverteilt sind.

(a) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für $\theta = (a, b)$ durch

$$\hat{\theta}_n := (\hat{a}_n, \hat{b}_n) = (\min\{X_1, ..., X_n\}, \max\{X_1, ..., X_n\})$$

gegeben ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass $\hat{\theta}_n$ asymptotisch konsistent ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte + 2 Bonuspunkte).

Seien $X, X_1, X_2, ...$ unabhängig und identisch verteile, reell-wertige Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{\theta_0})$ und $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und $\theta_0 \in \text{Int}(\Theta)$. Es bezeichne $\mathbb{E}_\theta$ den Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}_\theta$. Weiterhin gebe es Funktionen $f_1, ..., f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$e(\theta) := \begin{pmatrix} \mathbb{E}_\theta f_1(X) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_\theta f_k(X) \end{pmatrix}$$

wohldefiniert ist. Durch

$$e_n := \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_1(X_i) \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_k(X_i) \end{pmatrix}$$

ist nun ein Schätzer für $e(\theta_0)$ definiert. Mittels $Z_n(\theta) := e(\theta) - e_n$ und $Z(\theta) = e(\theta) - e(\theta_0)$ wollen wir nun θ_0 über

$$\hat{\theta}_n := \underset{\theta\in\Theta}{\arg\min} \|Z_n(\theta)\|$$

schätzen. Wir nehmen dafür an, dass e stetig differenzierbar und bijektiv ist. Zeigen Sie:

(a) $\sup_{\theta\in\Theta} \|Z_n(\theta) - Z(\theta)\| \xrightarrow{p} 0$,

(b) $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$,

(c) *(Bonus)* $Z_n(\hat{\theta}_n) = 0$ mit einer Wahrscheinlichkeit gegen 1 konvergierend.

Für die nachfolgende Teilaufgabe gehen wir davon aus, dass $Z_n(\hat{\theta}_n) = 0$.

(d) Finden Sie eine Matrix V, so dass $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V)$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **05.11.2021, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`