UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik II
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2021/2022

1. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Summe:

Übungsgruppe (Mo oder Di): Tutorin: Maybritt Schillinger
Namen:

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Sei $M_n : \Theta \to \mathbb{R}$ eine Folge von zufälligen Funktionen und $M : \Theta \to \mathbb{R}$ eine deterministische Funktion, wobei $\Theta = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass für M_n und M folgende Eigenschaften erfüllt werden:

(i) M ist stetig;

(ii) $\theta \mapsto M_n(\theta)$ ist monoton wachsend in θ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $M_n(\theta) = M(\theta) + o_p(1)$ für alle $\theta \in \Theta$.

Zeigen Sie, dass

$$\sup_{\theta\in\Theta} |M_n(\theta) - M(\theta)| = o_p(1)$$

Bemerkung: Die Definition von $o_p(1)$ können Sie dem 1. Präsenzsblatt oder dem Skript (auf Seite 12) entnehmen. Falls wir $-M_n$ betrachten, fordern wir in (ii) monoton fallend.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Seien $Z, Z_1, Z_2, ..., Z_n$ unabhängige, reell-wertige Zufallsvariablen mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ gilt. Für $\theta \in \Theta := [a, b]$, $0 < a < b$, definieren wir

$$\begin{aligned} M_n(\theta) &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |Z_i - \theta| - |Z_i|, \\ M(\theta) &:= \mathbb{E}(|Z - \theta| - |Z|). \end{aligned}$$

Weiterhin sei $\hat{\theta}_n := \arg\min_{\theta\in\Theta} M_n(\theta)$ und $\theta_0 := \arg\min_{\theta\in\Theta} M(\theta)$. *Somit ist θ_0 der Median von Z und $\hat{\theta}_n$ der Stichprobenmedian (empirische Median) von $Z_1, ..., Z_n$.* Wir fordern zusätzlich, dass der Median bzgl. der Dichte f eindeutig bestimmt ist und im Intervall $[a, b]$ liegt. Wir beweisen in dieser Aufgabe $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0$. Zeigen Sie dafür:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} M_n(\theta) &= \int_0^\theta m_n(\rho)\,\mathrm{d}\rho, \\ M(\theta) &= \int_0^\theta m(\rho)\,\mathrm{d}\rho, \end{aligned}$$

wobei $m_n(\rho) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n -\mathrm{sign}(Z_i - \rho)$ und $m(\rho) := \mathbb{E}(-\mathrm{sign}(Z-\rho))$ für $\mathrm{sign}(x) = 1$, falls $x > 0$, $\mathrm{sign}(x) = -1$, falls $x < 0$ und $\mathrm{sign}(x) = 0$, falls $x = 0$.

(b) Es ist

$$\sup_{\theta\in\Theta} |M_n(\theta) - M(\theta)| \xrightarrow{p} 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabe 1.

(c) Folgern Sie, dass $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Seien f und g zwei Lebesgue-Dichten. Die Kullback-Leibler-Divergenz zwischen f und g definieren wir dann als

$$K(f,g) = \mathbb{E}_f\left[\log\frac{f(X)}{g(X)}\right],$$

wobei $\mathbb{E}_f$ sich auf die Dichte f von X bezieht.

(a) Bezüglich der Modellklasse $\mathcal{M} := \{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ betrachten wir die negative log-Likelihood $L_n^{\mathcal{M}}(\theta)$ von n unabhängigen Beobachtungen $X_1, ..., X_n$, wobei jede Zufallsvariable X_i die Dichte f besitzt,

$$L_n^{\mathcal{M}}(\theta) = -\frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^n f_\theta(X_i)\right).$$

Beachten Sie, dass f nicht notwendigerweise in $\mathcal{M}$ enthalten sein muss. Zeigen Sie, dass unter der Annhame (A1) aus der Vorlesung

$$\hat{\theta}_n := \arg\min_{\theta\in\Theta} L_n^{\mathcal{M}}(\theta) \xrightarrow{p} \arg\min_{\theta\in\Theta} K(f, f_\theta).$$

(b) Sei f_j die Dichte einer k-dimensionalen Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu_j, \Sigma_j)$, wobei $j \in \{0,1\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$K(f_0, f_1) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\Sigma_1^{-1}\Sigma_0) + (\mu_1 - \mu_0)^T\Sigma_1^{-1}(\mu_1 - \mu_0) - k - \log\left(\frac{\det\Sigma_0}{\det\Sigma_1}\right)\right)$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\mathbb{E}_{f_0}((X-\mu_0)^T\Sigma_1^{-1}(X-\mu_0)) = \mathrm{tr}(\Sigma_1^{-1}\Sigma_0)$$

für beliebige Matrizen Σ_0, Σ_1 gilt.

(c) Sei nun $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ eine k-dimensionale Stichprobe. Bestimmen Sie die Parameter so, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer bezüglich der Modellklasse

$$\mathcal{M} := \left\{\mathcal{N}(\nu, \Lambda) : \nu \in \mathbb{R}^k, \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_k)\right\}$$

konvergiert. Sie dürfen dabei annehmen, dass Satz 1.2 gilt, obwohl der Parameterraum nicht kompakt ist.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den **29.10.2021, 11:00 Uhr**.
(Der Zettelkasten ist im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat, Zettelkasten-Nr. 14.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat2-ws2122/index.html`