Statistik I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2020/2021

11. Übungsblatt

Aufgabe 41	Aufgabe 42	Aufgabe 43	Aufgabe 44	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 41 (Wiederholung: Konstruktion gleichmäßig bester Tests bei diskreten Verteilungen, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Für die Zulassung eines neuen Medikaments (zu eventuell teurerem Preis) muss statistisch nachgewiesen werden, dass dessen Heilungsrate (Anteil der geheilten Patienten bei Anwendung des Medikaments) $\theta \in (0,1)$ höher als die Heilungsrate $\theta_0 \in (0,1)$ der derzeit üblichen Medikamente auf dem Markt ist. Zu diesem Zweck werden klinische Studien mit einer bestimmten Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von Patienten $X_1, ..., X_n$ durchgeführt, wobei bei einem Heilungserfolg bei Person $i \in \{1, ..., n\}$, $X_i = 1$ gesetzt wird, ansonsten $X_i = 0$. Ein neues Medikament wird als besser erachtet, wenn ein Test mit einem vorgegebenen Niveau $\alpha \in (0,1)$ zu den Hypothesen $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$ die Alternative H_1 liefert. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Nehmen Sie an, dass die Patienten unabhängig voneinander geheilt werden (oder eben auch nicht). Geben Sie einen gleichmäßig besten Test $\phi : \{0,1\}^n \to [0,1]$ zum Niveau α für das beschriebene Testproblem an.

(b) Es sei nun $\alpha = 0.05$. Wir wissen, dass das derzeitige Standard-Medikament in 50% der Fälle heilend wirkt. In einer Studie mit $n = 10$ Personen erhalten wir, dass das neue Medikament bei $k = 8$ Patienten eine Heilung erzielt. Berechnen Sie das genaue Aussehen des Testes aus Teilaufgabe (a) und geben Sie die Testentscheidung an.

(c) Wir nehmen an, das neue Medikament hätte tatsächlich eine Heilungsrate von 60%. Wie groß wäre in der Situation von Teilaufgabe (b) der Fehler 2. Art des Testes?

Aufgabe 42 (Beispiele und Gegenbeispiele für Exponentialfamilien, 5 = 1 + 1 + 2 + 1 Punkte).

Zeigen Sie, dass die folgenden Verteilungen Exponentialfamlien bilden:

(a) n-dimensionale Bernoulli-Verteilung $\{\text{Bin}(1,\theta)^n : \theta \in (0,1)\}$ auf $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$,

(b) Poisson-Verteilung $\{\text{Poi}(\theta) : \theta \in (0,\infty)\}$ auf $\mathbb{N}_0$.

Sei $\mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ eine Familie von Verteilungen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ keine Exponentialfamilie bilden kann, wenn es eine Menge $A \in \mathcal{B}$ und $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ gibt mit $\mathbb{P}_{\theta_1}(A) = 0$, $\mathbb{P}_{\theta_2}(A) > 0$.
Bemerkung: Dies bedeutet, dass der Träger (Abschluss der Nichtnullstellenmenge) der Dichten p_θ nicht von θ abhängen darf.

(d) Sei nun $\mathbb{P}_\theta = U[0, \theta]$ und $\Theta = (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ keine Exponentialfamilie bildet.

Aufgabe 43 (Erwartungswert und Varianz von Statistiken in Exponentialfamilien, 4 = 3 + 1 Punkte).
Sei $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ eine einparametrige, natürlich parametrisierte Exponentialfamilie mit Dichten

$$p_\theta(x) = \exp(\theta \cdot T(x) - A(\theta))$$

bezüglich eines σ-endlichen Maßes μ auf dem Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, wobei $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine Statistik, $\Theta := \{\theta \in \mathbb{R} : \int \exp(\theta \cdot T(x)) \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty\}$ der natürliche Parameterraum und $A : \Theta \to \mathbb{R}$ eine Abbildung sei.

(a) Zeigen Sie, dass für $\theta \in \Theta^\circ$ (Inneres von Θ) gilt:

$$\mathbb{E}_\theta T = A'(\theta), \qquad \mathrm{Var}_\theta(T) = A''(\theta).$$

(b) Sei nun $I(\theta) := \mathbb{E}_\theta[(\partial_\theta \log p_\theta)^2]$ die Fisher-Information. Zeigen Sie, dass dann für $\theta \in \Theta^\circ$ auch gilt:

$$I(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(T).$$

Bemerkung: Die Aussagen gelten auch mehrdimensional. Für s-parametrige, natürlich parametrisierte Exponentialfamilien mit Dichten $p_\theta(x) = \exp\big(\langle \theta, T(x) \rangle - A(\theta)\big)$ mit $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ gilt:

$$\mathbb{E}_\theta T = \nabla_\theta A(\theta), \qquad \mathrm{Var}_\theta(T) = \nabla_\theta^2 A(\theta).$$

Aufgabe 44 (Übertragen der Ergebnisse für Exponentialfamilien auf Umparametrisierungen, 3 = 1 + 1 + 1 Punkte).
Gegeben sei eine strikt s-parametrige Exponentialfamilie $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mit Dichten

$$p_\theta(x) = C(\eta(\theta)) \cdot \exp(\langle \eta(\theta), T(x) \rangle) \cdot h(x)$$

bezüglich eines σ-endlichen Maßes μ auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ und $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^s : \int \exp(\langle \eta(\theta), T(x) \rangle) \cdot h(x) \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty\}$, $C(\eta) := \big(\int \exp\big(\langle \eta, T(x) \rangle\big) \cdot h(x) \,\mathrm{d}\mu(x)\big)^{-1}$. Es bezeichne $\{\tilde{\mathbb{P}}_\eta : \eta \in \Theta_\eta\}$ mit $\Theta_\eta := \{\eta(\theta) : \theta \in \Theta\}$ die zugehörige strikt s-parametrige, natürlich parametrisierte Exponentialfamilie mit Dichten

$$\tilde{p}_\eta(x) = C(\eta) \cdot \exp\big(\langle \eta, T(x) \rangle\big) \cdot h(x)$$

und $A(\eta) := -\log C(\eta)$. Es sei $\eta : \Theta \to \Theta_\eta$ bijektiv. Zeigen Sie jeweils durch Rückführung auf Ergebnisse für $\{\tilde{\mathbb{P}}_\eta : \eta \in \Theta_\eta\}$:

(a) $T(x)$ ist vollständig für $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$.

(b) Ist $\eta : \Theta \to \Theta_\eta$ und deren Umkehrabbildung einmal differenzierbar, so gilt für $\theta \in \Theta^\circ$,

$$\mathbb{E}_\theta T = (J_\eta(\theta)^{-1})' \cdot \nabla_\theta A(\eta(\theta)),$$

wobei J_η die Jacobi-Matrix von η und M' das Transponierte einer Matrix M bezeichnet.
Hinweis: Nutzen Sie die Bemerkung aus Teilaufgabe 43 (b).

(c) Wenden Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe (a) und (b) auf $\{\mathrm{Geo}(\theta) : \theta \in (0, \infty)\}$ an, d.h. zeigen Sie die Vollständigkeit von $T(x) = x$ und berechnen Sie $\mathbb{E}_\theta T$ mittels Teilaufgabe (b).

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **11.02.2021, 11:00 Uhr**.
Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge im PDF-Format ab. Es reicht, wenn eine der beiden Personen das Dokument hochlädt.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat-ws2020/index.html`