UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2020/2021

8. Übungsblatt

Aufgabe 29	Aufgabe 30	Aufgabe 31	Aufgabe 32	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 29 (Berechnung von MRE-Schätzern, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Es seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathbb{P}_\theta := \text{vExp}(\theta, \lambda)$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen, die einer verschoben Exponentialverteilung mit Parametern $\theta \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$ folgen. Die Dichte von $\mathbb{P}_\theta$ bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$p_\theta(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}.$$

(a) Berechnen Sie den MRE-Schätzer von θ für die Verlustfunktion $L(\theta, s) := (s - \theta)^2$.

Im Folgenden soll der MRE-Schätzer von θ für die Verlustfunktion $L(\theta, s) = |s - \theta|$ auf zwei verschiedene Weisen bestimmt werden. Sei $Y := (X_1 - X_n, ..., X_{n-1} - X_n)$.

(b) Betrachten Sie für $X = (X_1, ..., X_n) \sim \mathbb{P}_0^n$ den äquivarianten Schätzer $S(X) = X_n$ und berechnen Sie einen Median $v^*(y)$ von $\mathbb{P}^{S(X)|Y=y}$.

(c) Es ist bekannt, dass $S(X) = \min\{X_1, ..., X_n\}$ eine suffiziente und vollständige Statistik für θ ist. Berechnen Sie einen Minimierer $v^*(y)$ von $\mathbb{E}[|S(X) - v| \mid Y = y]$.
Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Basu. Sie müssen die Verteilung von $S(X)$ berechnen.

Bestimmen Sie (den in beiden Fällen gleichen) Schätzer

$$S^*(X) = S(X) - v^*(Y).$$

Aufgabe 30 (Konjugierte A-Priori-Verteilungen, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Im Folgenden geben wir die A-Priori-Verteilung $\mathbb{P}^\Theta$ des Parameters auf einem Parameterraum $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{T}))$ sowie die Verteilung von $\mathbb{P}^{X_1|\Theta}$ an. Sei $X_1, ..., X_n$ gegeben Θ unabhängig und identisch verteilt, und $X = (X_1, ..., X_n)'$. Damit gilt $\mathbb{P}^{X|\Theta} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}^{X_1|\Theta} = (\mathbb{P}^{X_1|\Theta})^n$.
Bestimmen Sie jeweils die A-Posteriori-Verteilung $\mathbb{P}^{\Theta|X}$ des Parameters. Zeigen Sie, dass diese zur selben Verteilungsklasse gehört wie $\mathbb{P}^\Theta$ und bestimmen Sie die entsprechenden Parameter.

(a) $\Theta \sim \text{Pareto}(x_{\min}, \alpha)$ und $X_1 \mid \Theta \sim U[0, \theta]$ (Gleichverteilung), wobei $x_{\min}$, $\alpha > 0$ und die Dichte von $\text{Pareto}(x_{min}, \alpha)$ bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$f_{x_{\min},\alpha}(\theta) = \frac{\alpha x_{\min}^{\alpha}}{\theta^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{\{\theta \geq x_{\min}\}}.$$

(b) $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ und $X_1 \mid \Theta \sim \text{Poi}(\lambda)$ (Poisson-Verteilung), wobei α, $\beta > 0$ und die Dichte von $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$f_{\alpha,\beta}(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \mathbb{1}_{\{\theta > 0\}}.$$

(c) $\Theta \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ und $X_1 \mid \Theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$.

Aufgabe 31 (Berechnung von Bayes-Schätzern, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Gegeben sei jeweils eine A-Priori-Verteilung $\mathbb{P}^{\Theta}$ des Parameters auf einem Parameterraum $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{T}))$ sowie die Verteilung von $\mathbb{P}^{X_1|\Theta}$. Wir nehmen an, dass $X_1, ..., X_n$ gegeben Θ unabhängig und identisch verteilt sind, und definieren $X = (X_1, ..., X_n)'$.
Bestimmen Sie im Folgenden jeweils den Bayes-Schätzer für Θ zu den entsprechenden Verlustfunktionen $L(\theta, S) = (\theta - S)^2$ und $L(\theta, S) = |\theta - S|$.

(a) $\Theta \sim \text{Pareto}(x_{\min}, \alpha)$ und $X_1 \mid \Theta \sim U[0, \theta]$ (Gleichverteilung), wobei $x_{\min} > 0$, $\alpha > 1$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für $Z \sim \text{Pareto}(x_{\min}, \alpha)$, $\mathbb{E}Z = x_{\min}\frac{\alpha}{\alpha-1}$ und $\text{Median}(Z) = x_{\min}\sqrt[\alpha]{2}$ gilt.

(b) $\Theta \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ und $X_1 \mid \Theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$.

(c) $\Theta \sim U[0, m]$ und $X_1 \mid \Theta \sim U[0, \theta]$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 32 (Charakterisierung erwartungstreuer Bayes-Schätzer, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $\{\mathbb{P}^{X|\Theta=\theta} : \theta \in \mathcal{T}\}$ eine Familie von Verteilungen auf dem Stichprobenraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ und $\mathbb{P}^{\Theta}$ eine A-Priori-Verteilung auf dem Parameterraum $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{T}))$. Zur Schätzung von $g(\theta)$ bei quadratischer Verlustfunktion sei ein erwartungstreuer Bayes-Schätzer S gesucht, d.h. ein Schätzer mit $\mathbb{E}_X[S \mid \Theta = \theta] = \int_{\mathcal{X}} S(x) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{X|\Theta=\theta}(x) = g(\theta)$.

(a) Zeigen Sie, dass für das Bayes-Risiko eines derartigen Schätzers

$$\int_{\mathcal{T}} R_{\theta}(g(\theta), S) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{\Theta}(\theta) = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{X}} (S(x) - g(\theta))^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{X|\Theta=\theta}(x) \, \mathrm{d}\mathbb{P}^{\Theta}(\theta) = 0$$

gelten muss, d.h. $S(x) = g(\theta)$ $\mathbb{P}^{(X,\theta)}$-f.s.

(b) Untersuchen Sie in den beiden folgenden Fällen, ob $S(x) = \overline{x}_n$ ein Bayes-Schätzer für den Parameter θ ist:

(i) $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{P}^{X|\Theta=\theta} = \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)^n, \ \theta \in \mathcal{T} = \mathbb{R})$ bei bekanntem $\sigma^2 > 0$,

(ii) $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{P}^{X|\Theta=\theta} = \text{Bin}(1, \theta)^n, \ \theta \in \mathcal{T} = [0, 1])$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **21.01.2021, 11:00 Uhr**.
Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge im PDF-Format ab. Es reicht, wenn eine der beiden Personen das Dokument hochlädt.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat-ws2020/index.html`