UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2020/2021

6. Übungsblatt

Aufgabe 21	Aufgabe 22	Aufgabe 23	Aufgabe 24	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 21 (Vollständigkeit von Statistiken, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).

Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Die Statistik $T(x) = x$ ist nicht vollständig für $\{U[\theta, \theta + 1] : \theta \in \mathbb{R}\}$.
Hinweis: Betrachten Sie periodische Funktionen s.

(b) Die Statistik $T(x_1, ..., x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2)$ ist suffizient, aber nicht vollständig für $\{\mathcal{N}(\theta, \theta^2)^n : \theta > 0\}$.

(c) $T(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ ist vollständig für $\{\text{Poi}(\lambda)^n : \lambda > 0\}$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass aus $\sum_{k=0}^\infty a_k \cdot x^k = 0$ und $\sum_{k=0}^\infty |a_k| x^k < \infty$ für alle $x > 0$, $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$ folgt.

Aufgabe 22 (Suffizienz und Vollständigkeit mit bedingten Verteilungen, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $\mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ eine Familie von Verteilungen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, die von einem σ-endlichen Maß μ mit Dichten p_θ dominiert werde. Ferner sei $A \in \mathcal{B}$ fest gewählt mit $\mathbb{P}_\theta(A) > 0$ für alle $\theta \in \Theta$, und $\mathbb{P}_\theta^*$ die bedingte Verteilung, d.h. $\mathbb{P}_\theta^*(B) := \mathbb{P}_\theta(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}_\theta(B \cap A)}{\mathbb{P}_\theta(A)}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $T : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ suffizient für $\mathcal{P}$, dann ist T auch suffizient für die Familie $\mathcal{P}^* := \{\mathbb{P}_\theta^* : \theta \in \Theta\}$.

(b) Ist T außerdem vollständig für $\mathcal{P}$, dann ist T auch vollständig für $\mathcal{P}^*$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass auch $\mathcal{P}^*$ von μ dominiert wird und bestimmte die zugehörigen Dichten p_θ^* in Abhängigkeit von p_θ und A.

Aufgabe 23 (Anwendung des Lemmas von Basu, 4 = 1.5 + 1 + 1.5 Punkte).

Gegeben seien unabhängig und identisch gleichverteilte Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U[0, \theta]$, wobei $\theta > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $U(x_1, ..., x_n) = \frac{x_1}{\max\{x_1, ..., x_n\}}$ benachbart (ancillary) bezüglich $\theta > 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $U(X_1, ..., X_n)$ und $\max\{X_1, ..., X_n\}$ unabhängig sind.
Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\max\{X_1, ..., X_n\}$ *vollständig für* $\theta > 0$ *ist.*

(c) Berechnen Sie mittels (b) den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1}{\max\{X_1, ..., X_n\}}\right].$$

Aufgabe 24 (Anwendung des Satzes von Rao-Blackwell, und Lehmann-Scheffe, 4 = 0.5 + 1 + 1.5 + 1 Punkte).

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Poi}(\lambda)$ unabhängig und identisch Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie:

(a) Der Schätzer $S := \mathbb{1}_{\{X_1=0\}}$ für $g(\lambda) := e^{-\lambda}$ ist erwartungstreu.

(b) Bekanntermaßen ist $T := \sum_{i=1}^n X_i$ suffizient für $\theta > 0$. Berechnen Sie $S^* := \mathbb{E}[S \mid T]$.
Hinweis: Nutzen Sie die Faltungseigenschaft $\sum_{i=1}^n X_1 \sim \text{Poi}(n\lambda)$ *der Poisson-Verteilung. Als Ergebnis sollten Sie* $S^* = ((n-1)/n)^T$ *erhalten.*

(c) Zeigen Sie, dass in obiger Situation die Aussage des Satzes von Rao-Blackwell bezüglich der quadratischen Verlustfunktion zutrifft, das heißt berechnen Sie explizit die linke und rechte Seite der (hier strikten) Ungleichung $\mathbb{E}[(S - g(\lambda))^2] > \mathbb{E}[(S^* - g(\lambda))^2]$, $n > 1$.

(d) Ist S^* aus (b) sogar ein UMVU-Schätzer? Zeigen Sie, dass $S^* \to g(\lambda)$ f.s. gilt.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **17.12.2020, 11:00 Uhr**.
Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge im PDF-Format ab. Es reicht, wenn einer der beiden Personen das Dokument hochlädt.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat-ws2020/index.html`