UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Statistik I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Wintersemester 2020/2021

4. Übungsblatt

Aufgabe 13	Aufgabe 14	Aufgabe 15	Aufgabe 16	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 13 (Scheffé-Konfidenzbänder, 4 = 2 + 2 Punkte).
Mit Hilfe des Satzes von Scheffé können wir gleichmäßige Konfidenzintervalle angeben.

(a) Wir betrachten den linearen Zusammenhang auf dem 3. Übungsblatt Aufgabe 9,

$$A_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot D_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., n,$$

mit $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ und unabhängig und normalverteilten Zufallsvariablen $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Geben Sie unter Nutzung des Satzes von Scheffé für die Prognose $\psi(D) := \beta_1 + \beta_2 \cdot D$ ein gleichmäßiges $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für alle $D \in \mathbb{R}$ an, d.h. definieren Sie (zufällige) Funktionen $\hat{\psi}_o, \hat{\psi}_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbb{P}(\hat{\psi}_u(D) \leq \psi(D) \leq \hat{\psi}_o(D) \quad \forall\, D \in \mathbb{R}) = 1 - \alpha.$$

Skizzieren Sie $[\hat{\psi}_u(D), \hat{\psi}_o(D)]$ sowie den Gauß-Markov-Schätzer $\hat{\psi}(D)$ für $D \in [0, 4]$ und $\alpha = 0.05$ für die Werte aus dem 3. Übungsblatt Aufgabe 9.
Hinweis: $F_{2,5,0.95} = 5.79$.

(b) Wir betrachten erneut das Amplitudenmodell auf dem 3. Übungsblatt Aufgabe 11,

$$A_i = \beta_1 \sin(2\pi \cdot t_i) + \beta_2 \cos(2\pi \cdot t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 0, ..., n,$$

mit $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ die Amplituden, $t_i := \frac{i}{n}$ die Zeit in Sekunden und unabhängig und normalverteilten Zufallsvariablen $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Geben Sie unter Nutzung des Satzes von Scheffé für die Prognose $\phi(t) := \beta_1 \sin(2\pi t) + \beta_2 \cos(2\pi t)$ ein gleichmäßiges (konservatives) $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für alle $t \in \mathbb{R}$ an, d.h. definieren Sie (zufällige) Funktionen $\hat{\phi}_o, \hat{\phi}_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbb{P}(\hat{\phi}_u(t) \leq \phi(t) \leq \hat{\phi}_o(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}) \geq 1 - \alpha.$$

Skizzieren Sie $[\hat{\phi}_u(t), \hat{\phi}_o(t)]$ sowie den Gauß-Markov-Schätzer $\hat{\phi}(t)$ für $t \in [0, 2]$ und $\alpha = 0.05$ für die Werte aus dem 3. Übungsblatt Aufgabe 11.

Aufgabe 14 (Gleichmäßiges Konfidenzintervall für alle Komponenten des KQ-Schätzers, $4 = 2 + 2$ Punkte).

In dieser Aufgabe betrachten wir ein allgemeines Modell

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

wobei $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mit $\mathrm{Rang}(X) = k$, $\beta \in \mathbb{R}^k$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ mit unabhängigen und normalverteilten $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sei $\hat{\beta}$ der KQ-Schätzer von β und $\alpha \in (0, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass mit $\hat{\sigma}^2 := \frac{R_0^2}{n-k}$, $R_0^2 := (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$,

$$\mathbb{P}\Big(|\hat{\beta}_j - \beta_j| \leq \sqrt{k\hat{\sigma}^2 \cdot F_{k,n-k,1-\alpha} \cdot [(X'X)^{-1}]_{jj}} \text{ für alle } j = 1, ..., k\}\Big) \geq 1 - \alpha.$$

(b) Zeigen Sie, dass $F_{k,n-k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\chi_k^2}{k}$ für $n \to \infty$; d.h., ist $X_n \sim F_{k,n-k}$, so gibt es eine Zufallsvariable $Z \sim \chi_k^2$ mit $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{Z}{k}$. Folgern Sie, dass

$$F_{k,n-k,1-\alpha} \to \frac{\chi^2_{k,1-\alpha}}{k}$$

Solche Konvergenzen waren früher wichtig, um die relativ schwer zu bestimmenden Quantile der F-Verteilung durch einfachere Quantile der χ^2-Verteilung anzunähern.
Sie dürfen ohne Beweis folgenden Satz benutzen:
Sei $W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ und die Verteilungsfunktion F_W von W streng monoton wachsend auf $F_W^{-1}((0, 1))$. Sei $w_{n,q}$ ein q-Quantil der Verteilung von W_n und w_q ein q-Quantil der Verteilung von W, $q \in (0, 1)$. Dann gilt auch $w_{n,q} \to w_q$.

Aufgabe 15 (Verallgemeinerte Inverse, $3 = 1 + 1 + 1$ Punkte).

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix und A^- die zugehörige g-Inverse von A definiert in Satz / Definition 3.4.

(a) Zeigen Sie, dass $AA^-A = A$ genau dann gilt, wenn $x = A^-b$ eine Lösung von $Ax = b$ für alle $b \in \mathrm{Lin}(A)$ ist.

Wir nehmen nun an, dass zusätzlich zu den Eigenschaften (i) - (iii) A^- die Bedingungen

$$\text{(iv) } (AA^-)' = AA^-, \qquad \text{(v) } (A^-A)' = A^-A,$$

erfüllt. Zeigen Sie:

(b) Die Matrix A^- ist eindeutig bestimmt.

(c) Ist $A'A$ invertierbar, so gilt $A^- = (A'A)^{-1}A'$.

Aufgabe 16 (Projektion der Normalverteilung, $5 = 1 + 1 + 1 + 0.5 + 1.5$ Punkte).

Sei $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Weiter sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I_n)$ ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor mit $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)' \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma^2 > 0$ sowie $Z = (Z_1, ..., Z_n)'$ mit $Z_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum und $U_\perp$ bezeichne sein orthogonales Komplement (bzgl. des Standardskalarproduktes). Zeigen Sie, dass $P_U(Z)$ und $P_{U_\perp}(Z)$ stochastisch unabhängig sind.

(b) Folgern Sie mit Teilaufgabe (a), dass dann auch $P_U(X)$ und $P_{U_\perp}(X)$ stochastisch unabhängig sind.

(c) Sei $W = \{(\lambda, ..., \lambda)' \in \mathbb{R}^n : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie die Verteilung von $P_W(X)$.

(d) Folgern Sie aus (b) und (c), dass $\hat{\mu} := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\hat{\sigma}^2 := n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$ stochastisch unabhängig sind.

(e) Sei $Y = (Y_1, ..., Y_n)'$ mit $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$. Bestimmen Sie die für $\hat{\nu} := n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$ und $\hat{\tau}^2 := (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\nu})^2$ die Verteilung von $\sqrt{n} \frac{\hat{\nu} - \nu}{\sqrt{\hat{\tau}^2}}$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **03.12.2020, 11:00 Uhr**.
Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge im PDF-Format ab. Es reicht, wenn einer der beiden Personen das Dokument hochlädt.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/stat-ws2020/index.html`