Dr. Stefan Richter
*Statistische Analyse von maschinellen Lernalgorithmen*
Wintersemester 2020/2021

## 11. Übungsblatt

**Aufgabe 1 (Approximation von Funktionen beschränkter Variation).**
Es sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit beschränkter Variation $|g|_{BV} < \infty$. Hierbei ist $|g|_{BV}$ wie folgt definiert:

$$|g|_{BV} = \sup_{M \in \mathbb{N}} \sup_{0 \le s_0 \le \ldots \le s_M \le 1} \sum_{i=1}^{M} \big|g(s_i) - g(s_{i-1})\big|.$$

Aus Analysis ist bekannt, dass es monoton wachsende Funktionen $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g = u - v$ und $|g|_{BV} = |u|_{BV} + |v|_{BV}$. Sei $N \in \mathbb{N}$.

(a) Definiere $C := u(1) - u(0)$. Warum gilt $C = |u|_{BV}$?

(b) Seien $t_i := \sup\{z \in [0,1] : u(z) - u(0) \le C\frac{i}{N}\}$, $i = 0, ..., N$ die 'Quantile' von $u$. Definiere

$$\tilde{u} : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{u}(z) := u(0) + \sum_{i=1}^{N} \frac{C}{N} \mathbb{1}_{\{z \ge t_i\}}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|u - \tilde{u}\|_\infty \le \frac{|u|_{BV}}{N}.$$

*Hinweis: Betrachten Sie den Ausdruck für $z \in [t_j, t_{j+1})$, $j = 0, ..., N-1$.*

(c) Zeigen Sie, dass $\tilde{u}$ die alternative Darstellung

$$\tilde{u}(z) = \frac{u(0) + u(1)}{2}(\mathbb{1}_{\{z \ge 0\}} - \mathbb{1}_{\{z < 0\}}) + \sum_{i=1}^{N} \frac{C}{2N}(\mathbb{1}_{\{z \ge t_i\}} - \mathbb{1}_{\{z < t_i\}})$$

besitzt.

(d) Folgern Sie, dass es eine Funktion $\tilde{g}$ der Form

$$\begin{aligned}\tilde{g}(z) \quad &= \quad \frac{g(0) + g(1)}{2}(\mathbb{1}_{\{z \ge 0\}} - \mathbb{1}_{\{z < 0\}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N} \frac{|u|_{BV}}{2N}(\mathbb{1}_{\{z \ge t_i\}} - \mathbb{1}_{\{z < t_i\}}) - \sum_{i=1}^{N} \frac{|v|_{BV}}{2N}(\mathbb{1}_{\{z \ge q_i\}} - \mathbb{1}_{\{z < q_i\}})\end{aligned}$$

mit $0 \le q_0 \le .. \le q_N \le 1$ gibt mit der Eigenschaft $\|g - \tilde{g}\|_\infty \le \frac{|g|_{BV}}{N}$.

**Aufgabe 2 (Konvergenzrate beim Boosting von Baumstümpfen).**
Sei $\mathcal{X} \subset [0,1]^d$ und $\mathcal{Y} = \{-1,+1\}$. In dieser Aufgabe ermitteln wir Abschätzungen von

$$\inf_{\delta\in\Delta} \big\{\tilde{R}(\delta) - \tilde{R}(\delta^*) + 2\lambda P(\|\delta\|_1)\big\}, \qquad \Delta = \{\sum_{j=1}^{M} \beta_j g_j : M \in \mathbb{N}, \beta_j \geq 0, g_j \in \mathcal{C}\}$$

bei Nutzung der Klasse der Baumstümpfe

$$\mathcal{C} := \{y_1 \mathbb{1}_{\{x_j < s\}} + y_2 \mathbb{1}_{\{x_j \geq s\}} : y_1, y_2 \in \mathcal{Y}, s \in \mathbb{R}, j \in \{1,...,d\}\}$$

und der exponentiellen bzw. logistischen Verlustfunktion $\tilde{L}(y,s) = \phi(-ys)$, $\phi \in \{\phi_1(x) = e^x, \phi_2(x) = \log(1+e^x)\}$ (vgl. Satz 6.35). Wir machen dazu die Modellannahme aus Definition 6.34, dass

$$\delta^*(x) = \sum_{j=1}^{d} h_j(x_j)$$

mit Funktionen $h_1, ..., h_d : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|h_j(0)| + |h_j(1)| + |h_j|_{BV} \leq B$, $B > 0$.

(a) Sei $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Aufgabe 1, dass es $\tilde{h}_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,...,d\}$ gibt mit

$$\|h_j - \tilde{h}_j\|_\infty \leq \frac{B}{N}, \qquad \|\tilde{h}_j\|_1 \leq \frac{B}{2}.$$

(b) Folgern Sie, dass $\tilde{h}_N(x) := \sum_{j=1}^{d} \tilde{h}_j(x_j) \in \Delta$ erfüllt:

$$\|\delta^* - \tilde{h}_N\|_\infty \leq \frac{Bd}{N}, \qquad \|\tilde{h}_N\|_1 \leq \frac{Bd}{2}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\inf_{\delta\in\Delta} \big\{\tilde{R}(\delta) - \tilde{R}(\delta^*) + 2\lambda P(\|\delta\|_1)\big\} \leq 2\lambda P(\frac{Bd}{2}).$$

(d) Es sei $\lambda = c \cdot (1+t)((V+2)V^{1/2})^{\frac{V+2}{V+1}} n^{-\frac{1}{2}\frac{V+2}{V+1}}$ wie in Satz 6.26, wobei $V = 2\lfloor 2\log_2(2d)\rfloor$. Zeigen Sie, dass mit einer universellen Konstante $c' > 0$ gilt:

$$\inf_{\delta\in\Delta} \big\{\tilde{R}(\delta) - \tilde{R}(\delta^*) + 2\lambda P(\|\delta\|_1)\big\} \leq c'(1+t)\log(d+1)^3 \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{cases} (Bd+1)e^{Bd+1}, & \phi = \phi_1, \\ (Bd+1), & \phi = \phi_2. \end{cases}$$

(e) *Diskussion:* Was ändert sich, wenn stattdessen $\delta^*(x) = \sum_{j=1}^{s} h_j(x_j)$ mit $1 \leq s \leq d$ angenommen wird?

**Aufgabe 3 (Approximation mit neuronalen Netzwerken).**
Es bezeichne $\sigma(x) = \max\{x, 0\}$ die ReLU-Aktivierungsfunktion. Diese Aufgabe soll einen Eindruck davon vermitteln, wie der Satz 7.7 der Vorlesung bewiesen wird. Definiere für $k \in \mathbb{N}$,

$$T_k : [0, 2^{2-2k}] \to [0, 2^{-2k}], \quad T_k(x) := \sigma(\frac{x}{2}) - \sigma(x - 2^{1-2k}),$$

und $R_k : [0,1] \to [0, 2^{-2k}]$, $R_k := T_k \circ T_{k-1} \circ ... \circ T_1$.

(a) Zeichnen Sie $R_1$, $R_1 + R_2$ und $R_1 + R_2 + R_3$.

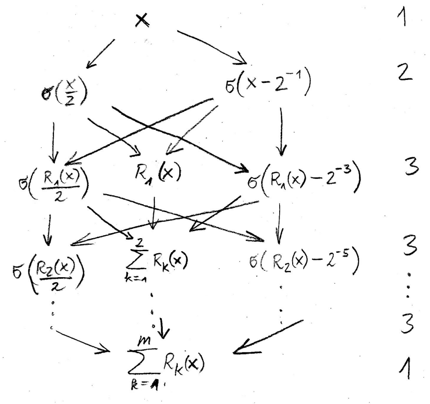
(b) Man kann mit Induktion zeigen, dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\Big|x \cdot (1-x) - \sum_{k=1}^{m} R_k(x)\Big| \leq 2^{-m},$$

Zeigen Sie, dass ein Netzwerk $f_m \in \mathcal{F}(m, (1,2,3,...,3,1))$ existiert mit

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{m} R_k(x).$$

*Hinweis: Nutzen Sie folgende Skizze:*




(c) Sei $g(x) = x \cdot (1-x)$. Zeigen Sie, dass

$$x \cdot y = g(\frac{x-y+1}{2}) - g(\frac{x+y}{2}) + \frac{x+y}{2} - \frac{1}{4} = xy.$$

*Diskussion:* Inwiefern kann diese Identität genutzt werden, um Produkte $x \cdot y$ mit Netzwerken zu approximieren?

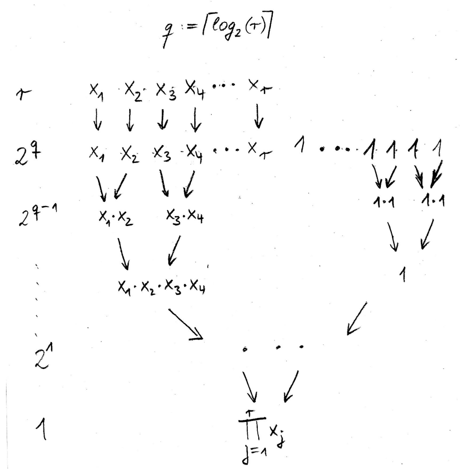
(d) Man kann zeigen, dass ein Netzwerk $f_m \in \mathcal{F}(m+4, (2,6,6,...,6,1))$ existiert, so dass $|f_m(x,y) - xy| \leq 2^{-m}$ für alle $x, y \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass ein Netzwerk

$$f_{m,r} \in \mathcal{F}((m+5)\lceil \log_2(r) \rceil, (r, 6r, 6r, ..., 6r, 1))$$

existiert mit

$$\big|f_{m,r}(x) - \prod_{j=1}^{r} x_j\big| \leq r^2 2^{-m}, \qquad x = (x_1, ..., x_r) \in [0,1]^r.$$

*Hinweis: Nutzen Sie folgende Skizze:*




(e) Falls $f : [0,1]^r \to \mathbb{R}$ $\beta$-mal differenzierbar ist, so existiert für jedes $a \in [0,1]^r$ Taylor-Polynom

$$T_a(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^r : 0 \leq |\alpha| \leq \beta - 1} (\partial^\alpha f)(a) \cdot \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!},$$

wobei $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_r^{\alpha_r}$ und $\alpha! := \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_r!$. Zeigen Sie: Gilt $\|\partial^\alpha f\|_\infty \leq K$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^r$ mit $|\alpha| = \beta$, so ist

$$|f(x) - T_a(x)| \leq K e^r \cdot |x - a|_\infty^\beta.$$

(f) Lokalisierte Taylor-Polynome: Sei $M \in \mathbb{N}$ und $D(M) := \{a_\ell := (\frac{\ell_j}{M})_{j=1,\dots,r} : \ell = (\ell_1, ..., \ell_r) \in \{0, 1, ..., M\}^r\}$ ein Gitter mit Genauigkeit $\frac{1}{M}$. Sei

$$T(x) := \sum_{a \in D(M)} T_a(x) \cdot \prod_{j=1}^{r} \big(1 - M \cdot |x_j - a_j|\big)_+$$

Zeigen Sie, dass

$$\|f - T\|_\infty \leq K e^r M^{-\beta}.$$

*Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für alle $x \in [0,1]^r$ gilt: $\sum_{a \in D(M)} \prod_{j=1}^r \big(1 - M \cdot |x_j - a_j|\big)_+ = 1$.*

(g) *Diskussion:* Inwiefern liefern (d) und (f) nun (im Wesentlichen) die Aussage von Satz 7.7?

**Homepage der Vorlesung:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/sam-ws2020/`