UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

Vorbereitungsblatt

Die folgenden Aufgaben dienen der Vorbereitung zur Klausur. Der Schwierigkeitsgrad entspricht dabei in etwa dem Schwierigkeitsgrad der Klausur.
Besprechung Wiederholungsübung:

- Diagonalisierbarkeit/Eigenwerte/Eigenräume: Aufgaben 1.1 A_1, A_2, A_4, 1.2, 1.4(b), 1.5(c) mit A_2, 1.12
- Rechnen in Euklidischen und unitären VR: Aufgaben 2.2 A_1, A_3, 2.3, 2.5, 2.9, 2.13
- Abbildungen in Euklidischen und unitären VR: Aufgaben 3.1 A_3, A_4, 3.3 (nur teilweise), 3.4, 3.5(a)(i),(ii),(b)
- Beweise in Euklidischen und unitären VR: Aufgaben 4.1, 4.8, 4.11, 4.3, evtl. 4.10, evtl. 4.7.
- Dualraum, Ringe/Ideale: Aufgaben 5.3 (evtl. nur Teile), 5.5, 6.2, evtl. 6.3(a), 6.4(a), 6.8

0 Lückentext

Aufgabe 0.1.

Teil A Pro korrekt ausgefülltem Feld gibt es 0.5 Punkte.

1. Ist V ein Vektorraum über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so heißt $\lambda \in K$ **Eigenwert** von f, wenn $\boxed{}$. Das **Minimalpolynom** μ_f ist das Polynom aus $K[t]$ kleinsten Grades, für welches $\boxed{}$ gilt.

2. Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, so heißt eine symmetrische Bilinearform $\gamma : V \times V \to K$ **positiv definit**, falls $\boxed{}$. Im Euklidischen Vektorraum (V, γ) besagt der **Satz des Pythagoras**, dass für alle $v, w \in V$:
$\boxed{}$.

3. Sind $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ Euklidische Vektorräume und $f : V \to W$ linear, so heißt f **Isometrie**, falls für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\boxed{}$.

4. Sind $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitäre Vektorräume mit Orthonormalbasen $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$, so gilt für die adjungierte Abbildung f^{ad} einer linearen Abbildung $f : V \to W$ folgender Zusammenhang zwischen den Darstellungsmatrizen von f und f^{ad}:
$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{ad}) = \boxed{}$.

5. Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt **normal**, wenn $\boxed{}$.

6. Ist V ein Vektorraum über einem Körper K, so ist der **Bidualraum** von V: $V^{**} =$
$\boxed{}$.

7. Sind R, S kommutative Ringe mit 1 und φ ein Ringhomomorphismus, so besagt der **Homomorphiesatz** folgende Isomorphie: $\boxed{}$. Ein Element $r \in R$ heißt **Einheit**, falls $\boxed{}$.

Teil B Pro korrekt ausgefülltem Feld gibt es 1 Punkt:

1. Es gilt $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^* = \{\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}\}$.
2. Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $f : V \to V$ diagonalisierbar mit $\chi_f = t^3 - t^2$, so gilt $\mu_f = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.
3. Sei $\mathbb{R}^2$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum mit $U^0 = \mathrm{Lin}((1,1))$. Dann ist $U = \mathrm{Lin}(\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad})$.
4. Sei $\mathbb{R}^2$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und $U := \mathrm{Lin}((1,2)^t) \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt bzgl. der Basis $\mathcal{B} = ((1,2)^t, (-2,1)^t)$ für die Orthogonalprojektion p_U: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(p_U) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.
5. Ist $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix mit $\det(A) = 1$ und $A\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}i\\2\end{smallmatrix}\right)$, so ist $A = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

1 Diagonalisierbarkeit, Eigenwerte, Eigenräume

Aufgabe 1.1 (***).

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_5 := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_8 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Entscheiden Sie, ob die gegebene Matrix A_i diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist.

(b) Berechnen Sie jeweils χ_{A_i}, μ_{A_i} (über $\mathbb{R}$), alle Eigenwerte sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheiten.

Aufgabe 1.2 (***).

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Geben Sie $S \in GL(3, \mathbb{R})$ an, so dass $S^{-1}AS$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist und geben Sie diese an.

(c) Berechnen Sie A^4.

Aufgabe 1.3.

Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \subset \mathbb{R}[t]$ der Untervektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 und $D \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben durch

$$D(f) = (tf)' + tf',$$

wobei $()'$ die Ableitung bezeichnet. Bestimmen Sie die Eigenwerte (sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten) und die Eigenräume von D. Ist D diagonalisierbar?

Aufgabe 1.4 (***).

Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ mit Grad höchstens 2. Seien $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ definiert durch

(i) $f(p) = [t \mapsto (4t+2) \cdot p(t+1) - 2t \cdot p(-t-1) - 2t \cdot p(t)]$

(ii) $g(p) = [t \mapsto \frac{1}{2}p(-t-1) - \frac{1}{2}p(t+3) + 2p(t)]$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume jeweils von f und g.

(b) Geben Sie jeweils eine Basis an, bezüglich derer die Darstellungsmatrizen von f bzw. g Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 1.5 (***).

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die Eigenräume von A_1 und A_2. Geben Sie die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte an und entscheiden Sie, ob A_1, A_2 diagonalisierbar sind.
Hinweis: Beide Matrizen besitzen den Eigenwert 1.

(b) Geben Sie μ_{A_1}, μ_{A_2} an.

(c) Trigonalisieren Sie A_1 und A_2, d.h. geben Sie jeweils eine obere Dreicksmatrix D und eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ an, so dass $S^{-1}AS = D$.

Aufgabe 1.6.

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K(V) = n$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mu_f = \chi_f$

(ii) $f^{n-1} \neq 0$

(iii) Es gibt $v \in V$, so dass $f^i(v)$, $i = 0, ..., n-1$ eine Basis von V ist.

Aufgabe 1.7.

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Sei $g, h \in \mathrm{End}_K(V)$, wobei g ein Isomorphismus und h nilpotent ist. Es gelte $g \circ h = h \circ g$.

(a) Zeigen Sie: $g^{-1} \circ h = h \circ g^{-1}$.

(b) Zeigen Sie: $g + h$ ist ein Isomorphismus.
Hinweise:

- *Reduzieren Sie das Problem auf den Fall $g = id_V$ mittels $g + h = g \circ (id_V + g^{-1} \circ h)$.*
- *Nutzen Sie, dass in $K[t]$ gilt: $(1+t) \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = 1 - (-1)^n t^n$.*

Aufgabe 1.8.

Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n, K)$. Wir definieren die Abbildung

$$\varphi : M(n \times n, K) \to M(n \times n, K), \quad B \mapsto AB$$

Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome von A und φ gilt: $\chi_\varphi = (\chi_A)^n$. Machen Sie dies auf zwei verschiedene Weisen:

(a) Fall $n = 2$: Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $M(2\times 2, K)$ und damit χ_φ.

(b) Fall $n \in \mathbb{N}$: Zeigen Sie, dass $\chi_A(\varphi) = 0$. Leiten Sie daraus Eigenschaften für χ_φ ab.

Aufgabe 1.9.

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit Minimalpolynom $\mu_\varphi = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ und charakteristischem Polynom $\chi_\varphi = \sum_{k=0}^n b_k t^k$. Zeigen Sie, dass $a_0 = 0$ genau dann, wenn $b_0 = 0$.

Aufgabe 1.10.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$.

(a) Sei f bijektiv. Zeigen Sie: Ist 1 kein Eigenwert von $f^{-1} \circ g$, so ist auch $f - g$ bijektiv. *Hinweis: Eine Abbildung $h \in End_K(V)$ ist bijektiv, falls* $\det(h) \neq 0$.

Aufgabe 1.11.

Sei K ein Körper, $A \in M(n \times n, K)$ und V ein Vektorraum über K.

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte und die dazugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von A und A^t übereinstimmen. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass im Allgemeinen die Eigenräume aber nicht übereinstimmen.

(b) Es sei $f : V \to V$ bijektiv. Sei λ EW von f. Zeigen Sie:

  (i) $\lambda \neq 0$.

  (ii) λ^{-1} ist EW von f^{-1} und $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Eig}(f^{-1}, \lambda^{-1})$.

(c) Sei f bijektiv. Zeigen Sie:

$$f^{-1} = f \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist diagonalisierbar und die EW von } f \text{ sind} \subset \{-1, 1\}.$$

Aufgabe 1.12 ((***)).

Sei V ein endlichdimensionaler K-VR und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Ist λ EW von f, dann ist λ^2 EW von f^2.

(b) Hat $f^2 + f$ den Eigenwert -1, so hat f^3 den Eigenwert 1.

(c) Gilt $f^3 = f$, so ist f diagonalisierbar.

(d) Sei $V = \mathbb{C}^4$. Es gelte $f^3 = f^2$ und $\mu_{alg}(f, 0) = 1$. Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalmatrix an, zu der f bzgl. einer geeigneten (nicht anzugebenden) Basis ähnlich ist.

Aufgabe 1.13.
Sei $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ ein Endomorphismus mit den folgenden Eigenschaften:

(i) f besitzt 2 als einzigen Eigenwert.

(ii) Die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert 2 ist drei.

(iii) $(f^2 - 2f)^2 = 0$

(a) Berechnen Sie χ_f und μ_f, sowie $\mu_{alg}(2, f)$, $\mu_{geo}(2, f)$. Entscheiden Sie, ob f über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

(b) (NK) Geben Sie die Jordan-Normalform von f an.

Aufgabe 1.14.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f^2 - 2f + \mathrm{id}_V = 0$, aber $f \neq \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie: f ist bijektiv, aber nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 1.15.
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Ist 0 einziger EW von A, so ist A nilpotent.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage im Allgemeinen nicht gilt, wenn $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.
Hinweis: Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *gilt* $A^5 = A$.

Aufgabe 1.16.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $7f^2 - f^6 = f + 6f^2 - f^3 = 6\mathrm{id}_V$. Zeigen Sie: Es gibt Untervektorräume $X, Y \subset V$ mit

$$V = X \oplus Y, \quad \forall x \in X : f(x) = x, \quad \forall y \in Y : f(y) = -y.$$

2 Rechnen in Euklidischen und unitären VR

Aufgabe 2.1.
Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$ und sei V ein Vektorraum über K. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V. Zeigen Sie:

$$\forall v \in V : \langle v, v \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = -\langle w, v \rangle.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\langle v + w, v + w \rangle$.

Aufgabe 2.2 (***).

(a) Gegeben seien die folgenden Matrizen aus $M(3 \times 3, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_3 &:= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, A_4 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils Signatur(A_i) und entscheiden Sie, ob A_i positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit ist ($i = 1, 2, 3, 4$). Sind die zugehörigen Bilinearformen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A_i}$ nicht ausgeartet?

(b) Gegeben sei die folgende Bilinearformen auf dem Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$:

$$\gamma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 y_3 + x_3 y_1.$$

Entscheiden Sie, ob γ nicht ausgeartet und ob sie positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit ist.

Aufgabe 2.3 (***).
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ zusammen mit der von A induzierten Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ein Euklidischer Vektorraum ist.

(b) Sei $U := \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ mit $v_1 = (1, -1, 0)^t$, $v_2 = (1, 1, 2)^t$). Berechnen Sie eine ONB von U in $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_3})$ und in $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$.

(c) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion $p_U(v)$ von $v = (6, 0, 0)^t$ auf U in beiden Euklidischen Räumen und berechnen Sie jeweils den Abstand $\inf_{u \in U} \|v - u\|$.

(d) Ermitteln Sie eine Basis von $U^\perp$ in beiden Euklidischen Räumen.

Aufgabe 2.4.
Sei $V = \mathbb{C}^4$ der unitäre Standardraum und

$$v_1 := (2, 0, 2i, 0)^t, \quad v_2 := (0, i, 0, 1)^t$$

sowie $U := \mathrm{Lin}(v_1, v_2) \subset \mathbb{C}^4$.

(a) Ermitteln Sie eine ONB von $U^\perp$.

(b) Finden Sie $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, so dass die orthogonale Projektion p_U auf U gegeben ist durch $p_U = \tilde{A}$.

(c) Bestimmen mittels (b) eine Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $p_{U^\perp} = \tilde{B}$.
Hinweis: Was ist $p_U + p_{U^\perp}$?

Aufgabe 2.5 (***).

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$$

ein unitärer Raum ist.

(b) Bestimmen Sie eine ONB von $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$, sowie $U^\perp$ von $U := \mathrm{Lin}((1, 0)^t)$.

(c) Sei E die Standardbasis. Geben Sie $M_E^E(p_U)$ an.

Aufgabe 2.6.

Sei $V = \mathbb{R}^4$ der Euklidische Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und $U := \text{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, wobei

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie eine ONB $\mathcal{B}$ von U.

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $p_U(x)$ von $x = (1,1,1,1)^t \in V$ auf U sowie $\inf_{u \in U} \|x - u\|$.

Aufgabe 2.7.

-war dieselbe wie 2.4-

Aufgabe 2.8.

Wir betrachten den Euklidischen Standardraum $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und den Untervektorraum

$$U := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Weiter bezeichne $W := U^\perp$ das orthogonale Komplement von U und p_W die orthogonale Projektion auf W.

(a) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ und bestimmen Sie eine ONB von W.

(b) Berechen Sie $p_W(e_1), p_W(e_2), p_W(e_3)$, wobei $E := (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Bestimmen Sie $M_E^E(p_W)$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von p_W.

Aufgabe 2.9 (***).

Sei $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ der Polynomraum mit Grad höchstens 1 über $\mathbb{R}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (p, q) \mapsto p(1)q(1) + p(2)q(2)$ eine Bilinearform auf V. Eine Basis von V ist gegeben durch $\mathcal{B} = (1, t)$,

(a) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(b) Zeigen Sie, dass $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Raum ist.

(c) Bestimmen Sie eine ONB von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(d) Berechnen Sie $U^\perp$ für $U := \text{Lin}(t - 1)$.

Aufgabe 2.10.

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2.11.

Führen Sie die Hauptachsentransformation für die folgende Matrix durch

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d.h. finden Sie $T \in SO(3)$, so dass $T^t A T$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2.12.
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und $(p, q) = \text{Signatur}(A)$. Weiter seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A.

(a) Es gelte $p + q \leq n$. Zeigen Sie, dass $\text{Kern}(A) \neq \{0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $p = \#\{i \in \{1, ..., n\} : \lambda_i > 0\}$, $q = \#\{i \in \{1, ..., n\} : \lambda_i < 0\}$.

Aufgabe 2.13 (***).
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: Ist $p : V \to V$ linear mit $p(V) \subset U$ und gilt $\forall v \in V : p(v) - v \perp U$, so gilt $p^2 = p$.

3 Abbildungen in Euklidischen und unitären VR

Aufgabe 3.1 (***).
Es bezeichne $\mathbb{R}^2$ den Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ das Standardskalaprodukt. Weiter sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ das von $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ induzierte Skalarprodukt. Es ist bekannt, dass $\mathcal{B} = ((1, 0)^t, (1, 1)^t)$ eine ONB von $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ bildet. Gegeben seien weiter die Abbildungen $f_i = \tilde{A}_i$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie jeweils sowohl im Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ als auch in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$, ob

(a) f_i eine Isometrie ist ($i = 1, 2, 3, 4$),

(b) f_i selbstadjungiert ist ($i = 1, 2, 3, 4$).

Aufgabe 3.2.

(a) Sind die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2+i \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ normal?

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ normal. Zeigen Sie: Es gilt $|b| = |c|$.

Aufgabe 3.3 (***).
Gegeben sei die positiv definite Matrix $C := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ i & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Ermitteln Sie eine ONB von $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens ausgehend von der Basis $(v_1, v_2) := ((i, 0)^t, (0, 1)^t)$.

(b) Prüfen Sie, ob die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,

$$f_1(v) := \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v, \quad f_2(v) := \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} v$$

selbstadjungiert / unitär in $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bzw. $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ sind. Geben Sie auch jeweils die adjungierte Abbildung an, d.h. $M_E^E(f_1^{ad})$ und $M_E^E(f_2^{ad})$ (nicht in $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$), wobei $E = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^2$ bezeichnet.
Berechnen Sie in $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ den Wert $f_2^{ad}((1,0)^t)$.

Aufgabe 3.4 (***).

Wir betrachten den Euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ und die beiden Vektoren $v_1 = (1,1,0)^t$, $v_2 = (3,5,0)^t$. Bestimmen Sie alle Isometrien $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit

$$f(v_1) = (1,1,0)^t, \quad f(v_2) = (4,4,\sqrt{2})^t.$$

Aufgabe 3.5 (***).

(a) Es sei $V := M(n \times n, \mathbb{R})$ der Raum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^t B)$ ein Skalarprodukt auf V. Berechnen Sie jeweils f^{ad} zu folgenden Abbildungen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ und entscheiden Sie, ob f selbstadjungiert ist.

(i) $f(A) = A^t$,

(ii) $f(A) = S \cdot A$ mit festem $S \in M(n \times n, \mathbb{R})$,

(iii) $f(A) = SAS^t$ mit festem $S \in GL(n, \mathbb{R})$.

(b) Seien $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(\mathbb{R}^{2n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die Euklidischen Standardräume. Sei $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ mit $f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = g(x)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $f^{\mathrm{ad}}(v) = \left(\begin{smallmatrix} g^{\mathrm{ad}}(v) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(ii) Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Bild}(f^{\mathrm{ad}}) = n - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Kern}(g)$.

(c) Zeigen Sie, dass für den unitären Standardraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) = (\mathbb{C}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die Abbildung $f(z) = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) \cdot z$ nicht selbstadjungiert ist, aber $f^2 = f^{ad}$ erfüllt.

4 Beweise in Euklidischen und unitären VR

Aufgabe 4.1 (***).

Sei $(V\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidscher Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es bezeichne $p_U : V \to V$ die orthogonale Projektion auf U.

(a) Zeigen Sie: p_U ist selbstadjungiert.

(b) Ist $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ selbstadjungiert und $p(V) = U$, dann ist $\mathrm{Kern}(p) = U^\perp$.

(c) Ist $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ selbstadjungiert, eine Projektion und $p(V) = U$, so ist $p = p_U$.

Sei nun $(V\langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ normal.

(d) Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^{ad})$.

Aufgabe 4.2.

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine Isometrie und eine Projektion. Zeigen Sie, dass bereits $f = \mathrm{id}_V$ gilt.

Aufgabe 4.3 (***).
Sei $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der n-dimensionale Euklidische Standardraum. Für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ definieren wir

$$S_x := E_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^t \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, z\rangle = 0$ gelten $S_x x = -x$ und $S_x z = z$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $S_x \in O(n) \setminus SO(n)$.

(c) Für $v, w \in \mathbb{R}^n, v \neq w$ mit $\|v\| = \|w\|$ gilt $S_{w-v}(v) = w$.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\langle w - v, w + v\rangle$.

(d) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Raum und $v, w \in V$. Zeigen Sie: Es gilt
$$\|v\| = \|w\| \iff \text{Es gibt Isometrie } f : V \to V \text{ mit } f(v) = w.$$

Aufgabe 4.4.
Sei $(V, \langle.,.\rangle)$ ein Euklidischer Raum mit $2 \leq \dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$ und $v, w \in V \setminus \{0\}$. Definiere $\varphi, \psi \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ durch
$$\varphi(x) := \langle x, v\rangle w, \quad \psi(x) = \langle x, w\rangle v.$$

Zeigen Sie:

(a) $\varphi^{\mathrm{ad}} = \psi$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von φ.

(c) Zeigen Sie, dass
$$\varphi \text{ diagonalisierbar} \iff \langle v, w\rangle \neq 0.$$
Geben Sie in diesem Fall die Diagonalmatrix an, zu der φ ähnlich ist.

(d) φ ist selbstadjungiert genau dann, wenn v, w linear abhängig sind.

Aufgabe 4.5.
Sei $(V, \langle.,.\rangle)$ ein n-dimensionaler unitärer Raum und sei $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie:

(a) $f^{\mathrm{ad}} \circ f, f \circ f^{\mathrm{ad}}$ sind selbstadjungiert.

Weiter sei $\{b_1, ..., b_n\}$ eine ONB von V bestehend aus den Eigenvektoren von $f^{\mathrm{ad}} \circ f$. Zeigen Sie:

(b) Alle Eigenwerte von $f^{\mathrm{ad}} \circ f$ sind positiv.

(c) Sei $s \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gegeben über $s(b_j) = \sqrt{\lambda_j} \cdot b_j$. Dann ist $s \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ selbstadjungiert und positiv definit mit $s \circ s = f^{\mathrm{ad}} \circ f$.

(d) $u := f \circ s^{-1}$ ist unitär.

(e) f ist genau dann normal, wenn $u \circ s = s \circ u$ gilt.

Aufgabe 4.6.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukten $\gamma_1, \gamma_2 : V \times V \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, die sowohl in (V, γ_1) als auch in (V, γ_2) eine ONB ist, so gilt schon $\gamma_1 = \gamma_2$.

Aufgabe 4.7.
Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f^2 = f^{ad}$. Zeigen Sie:

(a) f ist normal,

(b) f^3 ist selbstadjungiert,

(c) $f^6 = f^3$,

(d) Falls f injektiv ist, gilt $f^3 = \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 4.8 (***).
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum, und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Ist f selbstadjungiert und unitär, so gilt bereits $f^2 = \mathrm{id}_V$.

(b) Ist f normal und nilpotent, so ist $f = 0$.

(c) Ist f normal und sind alle Eigenwerte von f reell, so ist f selbstadjungiert.

(d) Ist f normal und sind alle Eigenwerte von f imaginär, so ist $f = -f^{ad}$.

Aufgabe 4.9.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ zwei n-dimensionale unitäre Vektorräume und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ selbstadjungiert.

(a) f habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$\text{Es gibt } \varphi : V \to W \text{ unitär mit } \varphi \circ f = g \circ \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ hat die Eigenwerte } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Hinweis für „$\Rightarrow$“: Zeigen Sie, dass die Bilder der EV von f unter φ EV von g sind.

Seien nun $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V) = (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W) = (\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die unitären Standardräume und $f = \tilde{A}$, $g = \tilde{B}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass f und g die gleichen Eigenwerte besitzen.

(c) Zeigen Sie, dass es keinen orthogonalen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ gibt mit $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe von (b) und (c): Die Bedingung in (a), dass beide Endomorphismen selbstadjungiert sein müssen, kann nicht ohne Weiteres weggelassen werden.

Aufgabe 4.10 (***).
Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$. Eine Abbildung $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ heißt *winkeltreu*, falls f injektiv ist und $\forall v, w \in V \setminus \{0\} : \sphericalangle(v, w) = \sphericalangle(f(v), f(w))$. Zeigen Sie:

(a) f winkeltreu $\iff$ $\exists\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \exists G \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ Isometrie : $f = \lambda \cdot G$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $G \in End_{\mathbb{R}}(V)$ genau dann eine Isometrie ist, wenn G eine ONB von V auf eine ONB abbildet.

Aufgabe 4.11 (***).
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum mit $\forall v \in V : \langle f(v), v\rangle = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $g := f + f^{ad}$, $h := f - f^{ad}$ normale Abbildungen sind.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ gilt: $\langle g(v), v\rangle = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass g, h nur den Eigenwert 0 besitzen.

(d) Folgern Sie, dass $g = h = 0$ und damit $f = 0$.

5 Dualraum

Aufgabe 5.1.
Sei $V = M(2 \times 2, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ mit Basis

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Definiere die Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \mathrm{Spur}(A)$. Zeigen Sie:

(a) $\varphi \in V^*$.

(b) Es bezeichne $\mathcal{B}^*$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis. Bestimmen Sie $\Phi^{-1}_{\mathcal{B}^*}(\varphi)$.

Aufgabe 5.2.
Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B} := \{v_1, v_2\}$ bzw. $\mathcal{C} := \{w_1, w_2, w_3\}$ und zugehörigen dualen Basen $\mathcal{B}^* := \{v_1^*, v_2^*\}$ bzw. $\mathcal{C}^* := \{w_1^*, w_2^*, w_3^*\}$ von V^* bzw. W^*. Definiere die lineare Abbildung $f : V \to W$ über

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*}(f^*)$ von der zu f dualen Abbildung f^*.

(b) Berechnen Sie $(f^*(3w_1^* - w_2^* + w_3^*))(-v_1 + 4v_2)$.

Aufgabe 5.3.
Es sei zunächst $\mathbb{R}^2$ der Standard-Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B} := (v_1, v_2) := (\binom{1}{2}, \binom{0}{1})$ eine Basis.

(a) Berechnen Sie $(2v_1^* + v_2^*)(3v_1 + 2v_2)$ und $v_2^*((1,4)^t)$.

(b) Geben Sie $T^{\mathcal{B}^*}_{(e_1^*, e_2^*)}$ an und schreiben Sie v_1^* als Linearkombinationen von e_1^*, e_2^*. Berechnen Sie damit $v_2^*((1,5)^t)$.

(c) Sei $U := \mathrm{Lin}(u)$ mit $u := (1,3)^t$. Stellen Sie $U^0 = \mathrm{Lin}(\varphi)$ dar und geben Sie $M_1^{(e_1,e_2)}(\varphi)$ an.

Sei nun (w_1, w_2, w_3) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und $f : V \to W$ linear gegeben durch

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sowie $\psi = w_1^* + w_2^*$.

(d) Geben Sie $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(f)$ an.

(e) Berechnen Sie $f^*(\psi)(v_1 + v_2)$.

Aufgabe 5.4.
Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$. Die duale Basis sei $\mathcal{B}^* = (b_1^*, ..., b_n^*)$, und $\Psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ der durch $\Phi(b_i) = b_i^*$ $(i = 1, ..., n)$ gegebene Isomorphismus. Definiere

$$\pi : V \times V^* \to K, (v, f) \mapsto f(v).$$

Zeigen Sie, dass $\gamma : V \times V \to K$, $(v, w) \mapsto \pi(v, \Psi_{\mathcal{B}}(w))$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform ist.

Aufgabe 5.5 (***).
Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ linear, f^* die duale Abbildung. Sei $b \in W$. Zeigen Sie:

$$\exists x \in V : \quad f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varphi \in \operatorname{Kern}(f^*) : \varphi(b) = 0.$$

Hinweis für „$\Leftarrow$“: Verwenden Sie einen Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 5.6.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

$$\tilde{U} := \{v \in V : \forall \varphi \in U^0 : \varphi(v) = 0\}$$

erfüllt $\tilde{U} = U$.

Aufgabe 5.7.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ und dualer Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, ..., v_n^*)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spur}(f) = \sum_{i=1}^n v_i^*(f(v_i))$.

Aufgabe 5.8.
Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $J : U \to V, u \mapsto u$ die Inklusion. Zeigen Sie:

(a) $\forall\, \varphi \in V^* : J^*(\varphi) = \varphi|_U$.

(b) $U^0 = \operatorname{Kern}(J^*)$

(c) $J^{\mathrm{ad}} \circ J = \mathrm{id}_U$.

(d) $J \circ J^{\mathrm{ad}} = p_U$, wobei $p_U : V \to V$ die orthogonale Projektion auf U bezeichnet.

6 Ringe/Ideale

Aufgabe 6.1 (***). (a) Geben Sie jeweils einen Repräsentanten $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ für die folgenden Restklassen im Restklassenring $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ an: $\overline{13}$, $\overline{17} \cdot \overline{13}$, $\overline{12} \cdot \overline{17} \cdot \overline{13}$, $\overline{12} + \overline{14}$.

(b) Geben Sie jeweils einen Repräsentanten $f \in \mathbb{R}[t]$ mit $\mathrm{grad}(f) < 2$ für die folgenden Restklassen im Restklassenring $\mathbb{R}[t]/(t(t-1))$ an: $\overline{t^2}$, $\overline{t^3}$, $\overline{t^2} \cdot \overline{t}$, $\overline{t^2 - 4} \cdot \overline{t^2 + t}$.

(c) Geben Sie jeweils einen Repräsentanten $f \in \mathbb{R}[t]$ mit $\mathrm{grad}(f) < 2$ für die folgenden Restklassen im Restklassenring $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ an: $\overline{t^3}$, $\overline{t^2} \cdot \overline{t^2 + 3}$.

Aufgabe 6.2 (***).

Die Menge $R := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist bezüglich der Addition und Multiplikation von Matrizen ein kommutativer Ring mit 1. Sei weiter $I := \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : c \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $I \subset R$ ein Ideal ist.

(b) Zeigen Sie, dass $R/I \cong \mathbb{Q}$. *Hinweis: Verwenden Sie* $\varphi : R \to \mathbb{Q}, \varphi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)) = a$.

Aufgabe 6.3 (***).

Zeigen Sie, dass:

(i) $\mathbb{Q}[t]/(t + 1) \cong \mathbb{Q}$
Hinweis: Verwenden Sie $f : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}$, $f(p) = p(-1)$.

(ii) $\mathbb{R}[t]/((t - 1)(t + 2)) \cong \mathbb{R}^2$, wobei wir $\mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation definieren.

(iii) $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1) \cong \mathbb{C}$

Aufgabe 6.4 (***).

Seien R, S kommutative Ringe mit 1.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

  (i) R ist ein Körper.

  (ii) Es gilt $R^* = R \setminus \{0\}$.

  (iii) R besitzt genau die zwei Ideale (0) und (1).

(b) Sei nun R ein Körper. Zeigen Sie: Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist φ injektiv.

Aufgabe 6.5.

Wir nennen

$$\sqrt{I} := \{a \in R : a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

das *Radikal* von I. Zeigen Sie:

(a) $\sqrt{I}$ ist ein Ideal von R.
Hinweis: Für $x, y \in R$ *und* $m \in \mathbb{N}$ *gilt:* $(x + y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}$ *(wobei wir für* $n \in \mathbb{N}_0$, $r \in R$ *den Ausdruck* $n \cdot r := \underbrace{r + \ldots + r}_{n\text{-mal}}$ *definieren).*

(b) Ist $a \in \sqrt{(0)}$, so ist $1 - a \in R^*$.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $m \in \mathbb{N}$ *gilt:* $(1 - x) \cdot \sum_{i=1}^{m} x^i = 1 - x^{m+1}$.

(c) Berechnen Sie $\sqrt{180\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6.6.
Seien R, S kommutative Ringe mit 1. Dann ist $R \times S$ zusammen mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation

$$(r_1, s_2) + (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, s_1 + s_2), \quad (r_1, s_2) \cdot (r_2, s_2) := (r_1 \cdot r_2, s_1 \cdot s_2)$$

wieder ein kommutativer Ring mit Einselement $(1, 1) \in R \times S$.

(a) Zeigen Sie, dass $(R \times S)^* = R^* \times S^*$.

(b) Zeigen Sie:

$$I \text{ Ideal in } R \times S \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt Ideale } J_1 \subset R,\ J_2 \subset S \text{ mit } I = J_1 \times J_2.$$

Hinweis: Setzen Sie für „$\Rightarrow$“: $J_1 := \{r \in R : (r, 0) \in I\}$ und entsprechend J_2.

(c) Zeigen Sie:

$$I = J_1 \times J_2 \text{ Hauptideal in } R \times S \quad \Longleftrightarrow \quad J_1 \text{ Hauptideal in } R,\ J_2 \text{ Hauptideal in } S.$$

(d) Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringisomorphismus, so gilt $\varphi(R^*) = S^*$.

Aufgabe 6.7.
Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[t]$ nullteilerfrei ist.

Aufgabe 6.8 (***).
Bestimmen Sie für folgende Ringe alle Einheiten und irreduziblen Elemente:

(a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

(c) $F_2[t]$, hier nur die irreduziblen Elemente von Grad ≤ 2.

(d) $\mathbb{Z}$

Ist $\mathbb{R}[t]/(t^2)$ ein Körper?

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`