UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

11. Präsenzblatt

Aufgabe P41 (Anwendung des Spektralsatzes auf unitären Räumen).
Zusammen mit dem von der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$ induzierten Skalarprodukt ist $V = \mathbb{C}^3$ ein unitärer Raum. Es bezeichne $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis. Gegeben sei nun $\tilde{B} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{C}).$$

(a) Berechnen Sie ausgehend von E mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB $\mathcal{B}$ für $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{B}$ normal für den Raum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ ist, aber nicht im unitären Standardraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Ist $\tilde{B}$ unitär oder selbstadjungiert für $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$?

(c) Bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren von $\tilde{B}$. Ist diese eine ONB in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$?

Aufgabe P42 (Eigenschaften normaler Abbildungen).
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

(a) Sei f normal und nilpotent. Zeigen Sie: $f = 0$.

(b) Sei $f^{ad} = -f$. Zeigen Sie, dass f eine ONB aus Eigenvektoren besitzt.

(c) Sei f diagonalisierbar. Zeigen Sie: Es existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ auf V, so dass f normal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ ist.

Aufgabe P43 (Eigenschaften von Idealen).
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und I, J Ideale von R. Zeigen Sie:

(a) $I \cap J$ ist ein Ideal.

(b) Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von Idealen von R, d.h. $I_m \subset I_n$ für $m \leq n$. Dann ist $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ein Ideal von R.

(c) Sei $S \subset R$ eine Teilmenge. $A := \{r \in R \,|\, \forall s \in S : rs = 0\}$ ist ein Ideal in R.

(d) $I : J := \{r \in R \,|\, rJ \subset I\}$ ist ein Ideal in R.

Aufgabe P44 (Einheiten, irreduzible Elemente und Primelemente).

(a) (i) Zeigen Sie: Ist R ein kommutativer Ring mit 1 und $r \in R\backslash\{0\}$ ein Nullteiler, so ist $r \notin R^*$.
Hinweis: $r \in R\backslash\{0\}$ heißt Nullteiler, falls es $s \in R\backslash\{0\}$ gibt mit $r \cdot s = 0$.

(ii) Bestimmen Sie die Einheiten und irreduziblen Elemente im Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(b) Die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei ausgestattet mit der komponentenweisen Addition/Multiplikation. Dann ist $R := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit 1.

(i) Bestimmen Sie das Null- und das Einselement.

(ii) Bestimmen Sie alle Einheiten. Zeigen Sie, dass $(1,0)$ ein Primelement, aber kein irreduzibles Element ist.

(iii) Warum ist das kein Widerspruch zu den Resultaten der Vorlesung?

(c) (i) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Körper K gilt: $K[t]^* = K^* = K \backslash \{0\}$.

(ii) Wir betrachten den Ring $\mathbb{R}[t]$. Entscheiden Sie, ob $t^2 - t$ und $t^2 + 1$ irreduzibel und/oder Primelemente sind.

(iii) Die Menge $R := \mathbb{R} + t^2 \cdot \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{R}[t]$ ist ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, dass t^2 irreduzibel, aber nicht prim ist. Ist R ein Hauptidealring?
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass $R^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(iv) Zeigen Sie: $\operatorname{grad}(f) = 1 \Rightarrow f$ irreduzibel.

(v) Bestimmen Sie (bis auf Assoziiertheit) alle irreduziblen Elemente in $\mathbb{C}[t]$.

(d) Die Menge $\mathbb{Z}[i] := \{a+bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ist als Unterring von $\mathbb{C}$ ein kommutativer Ring mit 1. Es sei $\delta : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0, \delta(a+bi) := a^2+b^2$. Man kann zeigen (s. Wiederholungsblatt), dass $\mathbb{Z}[i]$ mit Gradfunktion δ ein Euklidischer Ring ist. Zeigen Sie:

(i) Für $f, g \in \mathbb{Z}[i]$ gilt: $\delta(fg) = \delta(f)\delta(g)$, d.h. δ ist *multiplikativ.*

(ii) Für $f \in \mathbb{Z}[i]$ gilt: $\delta(f) = 1 \Rightarrow f \in \mathbb{Z}[i]^*$. Bestimmen Sie damit $\mathbb{Z}[i]^*$.

(iii) Zerlegen Sie $2, 3, 4, 5 \in \mathbb{Z}[i]$ in ein Produkt irreduzibler Elemente.

(iv) Sei $z \in \mathbb{Z}[i]$. Ist $\delta(z) \in \mathbb{N}_0$ eine Primzahl, so ist z ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe P45 (Anwendungen des Homomorphiesatzes).

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[t]/(t) \cong \mathbb{Q}$. Ist $\mathbb{Q}[t]/(t)$ ein Körper?

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{C}, p \mapsto p(i)$ ein Ringhomomorphismus ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1) \cong \mathbb{C}$.

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $(F_n, +_n, \cdot_n)$ der in der Vorlesung definierte kommutative Ring mit 1. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{Z} \to F_n, z \mapsto r_n(z)$ ein Ringhomomorphismus ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong F_n$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Körper?

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`