UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

10. Präsenzblatt

Aufgabe P37 (Eigenschaften adjungierter Abbildungen).

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ Euklidische Vektorräume und $f, g : V \to W$ linear. Zeigen Sie:

(a) Seien V, W zunächst unendlichdimensional. Zeigen Sie, dass f^{ad} eindeutig bestimmt ist (es muss allerdings nicht notwendig existieren!)

(b) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $(\lambda f)^{\mathrm{ad}} = \lambda f^{\mathrm{ad}}$ und $(f+g)^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} + g^{\mathrm{ad}}$.

(c) Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

  (i) Die orthogonale Projektion $p_U : V \to V$ ist eine selbstadjungierte Abbildung.

  (ii) $(f^{\mathrm{ad}})^{-1}(U^\perp) = f(U)^\perp$
  Hinweis: Nutzen Sie A34(c).

(d) Sei nun $V = W$ und es gelte $f^{\mathrm{ad}} = -f$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von f, so folgt bereits $\lambda = 0$.

Aufgabe P38 (Eigenschaften von Matrizen im unitären Raum).

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$.

(a) Zeigen Sie: Ist A hermitesch, so gilt $\det(A) \in \mathbb{R}$ und die Diagonalelemente von A sind reell.

(b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen symmetrisch, hermitesch oder sogar positiv definit sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Sowohl die Charakterisierung positiv definiter Matrizen über das Hauptminorenkriterium als auch über positive Eigenwerte gelten weiterhin für hermitesche Matrizen.

(c) Bestimmen Sie eine ONB im unitären Standardraum $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine ONB aus Eigenvektoren von A_4.

(d) Sei nun $C := \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

  (i) Ermitteln Sie eine ONB von $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ ausgehend von der Basis $(v_1, v_2) := ((1,0)^t, (0,i)^t)$.

  (ii) Prüfen Sie, ob die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,

$$f_1(v) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2(v) := \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

  selbstadjungiert / unitär in $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bzw. $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ sind. Geben Sie auch jeweils die adjungierte Abbildung an.
  Hinweis: Nutzen Sie bei Bedarf A37(b).

Aufgabe P39 (Beispiele für adjungierte Abbildungen in verschiedenen Vektorräumen).

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $f : V \to V, f(x,y) = (x-y, 2x+y)^t$ linear. Ermitteln Sie f^{ad} in den Euklidischen Vektorräumen $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_2})$ und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$.

(b) Es sei $V = \ell^2 := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum der quadratsummierbaren Folgen über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle a, b\rangle := \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$. Berechnen Sie für den Linksshift $f : V \to V, f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ die Abbildung f^{ad} im Euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(c) Es sei $V := M(n \times n, \mathbb{C})$ der Raum der $n\times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$ und $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^t\overline{B})$ ein Skalarprodukt auf V. Berechnen Sie jeweils f^{ad} zu folgenden Abbildungen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$:

   (i) $f(A) = A^t$,

   (ii) $f(A) = S \cdot A$ mit festem $S \in M(n\times n, \mathbb{C})$,

   (iii) $f(A) = SAS^{-1}$ mit festem $S \in GL(n, \mathbb{C})$.

(d) Seien $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(\mathbb{R}^{2n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ die Euklidischen Standardräume. Sei $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ mit $f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = g(x)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   (i) Zeigen Sie, dass für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $f^{\mathrm{ad}}(v) = \left(\begin{smallmatrix} g^{\mathrm{ad}}(v) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   (ii) Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}(f^{\mathrm{ad}}) = n - \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Kern}(g)$.

Aufgabe P40 (Charakterisierung unitärer Abbildungen in unitären Vektorräumen).

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big).$$

(b) Sei $f : V \to V$ linear. Dann gilt

$$f \text{ unitär} \quad \iff \quad \forall v \in V : \|f(v)\| = \|v\|.$$

(c) Sei f unitär. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f, so gilt $|\lambda| = 1$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`