Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

9. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P33 (Charakterisierung von Linearformen/Annulatoren im Polynomraum).

Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad höchstens 2 über $\mathbb{R}$, und den Standardvektorraum $W := \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Es bezeichne $E := (1, t, t^2)$ die Monombasis von V, und $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von W.

(a) Wir betrachten die Linearform $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = \int_0^1 p(t)dt$. Sei $g : W \to V$, $e_i \mapsto t^{i-1}$. Berechnen Sie $g^*(\varphi)$.

Sei $U := \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ mit $v_1 := t+1, v_2 = t^2 - 2$ ein UVR von V.

(b) Berechnen Sie eine Basis von U^0 in Termen von E^*.

Gegeben sei nun die lineare Abbildung

$$f : V \to W, \quad f(p) := \big(p(0), p(1), p(-1)\big)^t.$$

(c) Berechnen Sie eine Basis (w_1, w_2) von $X := f(U)$, und berechnen Sie X^0 auf zwei verschiedene Weisen:

(i) Ergänzen Sie (w_1, w_2) mit $w_3 = (0,1,0)^t$ zu einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von W und nutzen Sie $X^0 = \mathrm{Lin}(w_3^*)$.

(ii) Statten Sie W mit dem Standardskalarprodukt aus und berechnen Sie $X^0 = \Psi(X^\perp)$, wobei $\Psi : W \to W^*$ den zugehörigen kanonischen Isomorphismus bezeichnet.

(d) Ermitteln Sie U^0 aus X^0.
Hinweis: Nutzen Sie die Pullback-Formel aus A34(c).

(e) Zeigen Sie, dass $U = \{p \in V : -2p(0) + p(1) + 3p(-1) = 0\}$.
Hinweis: Nutzen Sie P34(c).

Lösung:

(a) Es gilt

$$M_1^{E_3}(g^*(\varphi)) = M_1^{E_3}(\varphi \circ g) = \underbrace{M_1^E(\varphi)}_{=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})} \cdot \underbrace{M_E^{E_3}(g)}_{=E_3} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}),$$

d.h. $g^*(\varphi) = \widetilde{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})}$.
$g^*(\varphi)$ *„imitiert" die Messung* φ *auf* V *auf dem Vektorraum* W.

(b) Ergänze mit $v_3 = 1$ zu Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von V.
$\Rightarrow$

$$T_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$

$$T_{E^*}^{\mathcal{B}^*} = ((T_E^{\mathcal{B}})^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow U^0 = \mathrm{Lin}(v_3^*)$ mit $v_3^* = 1^* - t^* + 2(t^2)^*$ bzw. $M_1^E(v_3^*) = (1, -1, 2)$.

(c) Mit

$$w_1 := f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 := f(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist (w_1, w_2) eine Basis von X. Ergänze mit $w_3 = (1, 0, 0)^t$ zu einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von W. Es sei $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis in W.

(i) Es ist

$$T_{E_3}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$

$$T_{E_3^*}^{\mathcal{C}^*} = ((T_{E_3}^{\mathcal{C}})^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow X^0 = \mathrm{Lin}(w_3^*)$ mit $w_3^* = \widetilde{(-2, 1, 3)}$ bzw. $M_1^{E_3}(w_3^*) = (-2, 1, 3)$.

(ii) Gram-Schmidt auf (w_1, w_2, w_3) (jetzt mit $w_3 = (0, 5, 3)$, um nicht mit $\hat{w}_2$ arbeiten zu müssen) liefert ONB

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow U^\perp = \mathrm{Lin}(\hat{w}_3)$.
$U^0 = \Psi(U^\perp) = \mathrm{Lin}(\Psi(\hat{w}_3))$, wobei

$$M_1^{E_3}(\underbrace{\Psi(\hat{w}_3)}_{=\langle \cdot, \hat{w}_3 \rangle}) = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 1, 3).$$

(d.h. gleiches Ergebnis bei (i) und (ii)).

(d) Es ist

$$M_{E_3}^E(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \mathrm{Rang}(M_{E_3}^E(f)) = 3 \Rightarrow \mathrm{Rang}(f) = 3 \Rightarrow \mathrm{Rang}(f^*) = 3 \Rightarrow f^*$ Isomorphismus.
Hinweis $\Rightarrow U^0 = f^*((f(U)^0) = f^*(X^0) = \mathrm{Lin}(f^*(w_3^*))$. Hier ist

$$(f^*(w_3^*))(p) = w_3^*(f(p)) = w_3^*\Bigg(\begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{pmatrix} \Bigg) = -2p(0) + p(1) + 3p(-1).$$

(oder alternativ: $M_1^{E^*}(f^*(w_3^*)) = M_1^{E^*}(w_3^* \circ f) = M_1^{E_3}(w_3^*) \cdot M_E^{E_3}(f) = (-2, 1, 3) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (2, -2, 4)$, liefert wieder die Darstellung aus (a).

(e) Wir haben mit (a) und (c) zwei verschiedene Darstellungen für $\tilde{U}$:

$$\begin{aligned}\tilde{U} &\overset{(a)}{=} \{p \in V : \left[1^* - t^* + 2(t^2)^*\right](p) = 0\} \\ \tilde{U} &\overset{(b)}{=} \{p \in V : -2p(0) + p(1) + 3p(-1) = 0\}.\end{aligned}$$

Die Darstellung mittels (b) ist oft nützlicher. Wir haben mittels der dualen Abbildung f^* das Problem des Findens des Annulators in einen einfacheren Raum verlagert, was in einer angenehmeren Darstellung für U^0 und damit auch für $\tilde{U}$ $(= U)$ resultiert hat.

Aufgabe P34 (Eigenschaften des Annulators).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U, U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^0 \subset U_1^0$.

(b) $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.

(c) Sei $\dim_K(V) < \infty$. Definiere $\tilde{U} := \{v \in V \,|\, \forall \varphi \in U^0 : \varphi(v) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $\tilde{U} = U$.

Sei nun W ein weiterer K-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ und nun $U \subset W$ ein UVR.

(d) Zeigen Sie, dass $f^*(U^0) \subset (f^{-1}(U))^0$. Gilt $\dim_K(V) < \infty$ und $\dim_K(W) < \infty$, so gilt sogar Gleichheit (die sogenannte *Pushforward-Formel*).

Inwiefern können die Beweise von (a),(b) vereinfacht werden, wenn $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum ist?

Lösung:

(a) Sei $\varphi \in U_2^0$.

Sei $u \in U_1$ beliebig. $\Rightarrow u \in U_2$
$\overset{\varphi \in U_2^0}{\Rightarrow} \varphi(u) = 0$.

$\Rightarrow \varphi \in U_1^0$.

Anmerkung: Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum und $\Psi : V \to V^*$ der zugehörige kanonische Isormorphismus, so geht der Beweis einfacher: $U_2^0 = \Psi(U_2^\perp) \overset{U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp}{\subset} \Psi(U_1^\perp) = U_1^0$.

(b)
- „$\subset$“: Sei $\varphi \in (U_1 + U_2)^0$.
  $U_1 \subset U_1 + U_2 \overset{(a)}{\Rightarrow} (U_1 + U_2)^0 \subset U_1^0$.
  Analog: $(U_1 + U_2)^0 \subset U_2^0$.
  $\Rightarrow (U_1 + U_2)^0 \subset U_1^0 \cap U_2^0$.
- „$\supset$“: Sei $\varphi \in U_1^0 \cap U_2^0$.

  Sei $v \in U_1 + U_2$ beliebig. $\Rightarrow v = u + w$ mit $u \in U_1$, $w \in U_2$.
  $\Rightarrow \varphi(v) = \underbrace{\varphi(u)}_{\overset{\varphi \in U_1^0}{=} 0} + \underbrace{\varphi(w)}_{\overset{\varphi \in U_2^0}{=} 0} = 0$.

$\Rightarrow \varphi \in (U_1 + U_2)^0$.

Anmerkung: Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum und $\Psi : V \to V^*$ der zugehörige kanonische Isormorphismus, so geht der Beweis einfacher:

$$(U_1 + U_2)^0 = \Psi((U_1 + U_2)^\perp) \overset{A25}{=} \Psi(U_1^\perp \cap U_2^\perp) \overset{\Psi\ Isom.}{=} \Psi(U_1^\perp) \cap \Psi(U_2^\perp) = U_1^0 \cap U_2^0.$$

(c)
- „$\subset$“: Sei $v \in \tilde{U}$.
  Angenommen, $v \in V \backslash U$.
  Sei $(u_1, ..., u_k)$ Basis von $U \Rightarrow (u_1, ..., u_k, v)$ linear unabhängig in V und kann zu Basis $(u_1, ..., u_k, v, ...)$ von V ergänzt werden.
  Sei $(u_1^*, ..., u_k^*, v^*, ...)$ duale Basis.
  Definiere $\varphi := v^* \in U^0$.
  $v \in \tilde{U} \Rightarrow 0 = \varphi(v) = v^*(v) = 1$, Widerspruch.
  Also $v \in U$.
- „$\supset$“: Sei $u \in U$.
  Sei $\varphi \in U^0$.
  $\Rightarrow \varphi(u) = 0$.

  $\Rightarrow u \in \tilde{U}$.

(d)
- „$\subset$“: Sei $\psi \in f^*(U^0)$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $\varphi \in U^0$ mit $\psi = f^*(\varphi)$.

  Zu zeigen ist: $\psi \in (f^{-1}(U))^0$.
  Sei $v \in f^{-1}(U)$. $\Rightarrow$ Es gibt $u \in U$ mit $u = f(v)$.
  $\Rightarrow \psi(v) = (f^*(\varphi))(v) = (\varphi \circ f)(v) = \varphi(f(v)) = \varphi(u) = 0$.
  $\Rightarrow \psi \in (f^{-1}(U))^0$.
- „$\supset$“: $f^*(U^0)$, $(f^{-1}(U))^0$ sind UVR von W^* und es gilt „$\subset$“.
  Es genügt, $\dim_K(f^*(U^0)) = \dim_K((f^{-1}(U))^0)$ zu zeigen, dann folgt Gleichheit. Hier ist

$$\begin{aligned}
\dim_K(f^*(U^0)) &= \mathrm{Rang}(f^*|_{U^0}) \\
&= \underbrace{\dim(U^0)}_{=\dim_K(V)-\dim_K(U)} - \dim_K(\underbrace{\mathrm{Kern}(f^*|_{U^0})}_{=\mathrm{Kern}(f^*)\cap U^0=\mathrm{Bild}(f)^0\cap U^0=(\mathrm{Bild}(f)+U)^0}) \\
&= \dim_K(\mathrm{Bild}(f) + U) - \dim_K(U) \\
&= \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) - \dim_K(\mathrm{Bild}(f) \cap U). \quad (*)
\end{aligned}$$

  Sei $h := f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$. Dann gilt mit Dimensionsformel:

$$\begin{aligned}
&\dim_K(f^{-1}(U)) \\
=\ &\dim_K(\text{Def. Bereich von } h) \\
=\ &\dim_K(\underbrace{\mathrm{Bild}(h)}_{=\mathrm{Bild}(f)\cap U}) + \dim_K(\underbrace{\mathrm{Kern}(h)}_{=\mathrm{Kern}(f)\cap f^{-1}(U) \overset{\mathrm{Kern}(f)\subseteq f^{-1}(U)}{=} \mathrm{Kern}(f)}) \\
=\ &\dim_K(\mathrm{Bild}(f) \cap U) + \dim_K(\mathrm{Kern}(f)). \quad (**)
\end{aligned}$$

  Damit weiter ab (*):

$$\begin{aligned}
\dim_K(f^*(U^0)) &\overset{(*)}{=} \underbrace{\dim_K(\mathrm{Bild}(f))}_{=\dim_K(V)-\dim(\mathrm{Kern}(f))} - \dim_K(\mathrm{Bild}(f) \cap U) \\
&\overset{(**)}{=} \dim_K(V) - \dim_K(f^{-1}(U)) = \dim_K((f^{-1}(U))^0).
\end{aligned}$$

Alternative (aber nicht so einfach): Man kann beide Gleichheiten auf (22.14) der Vorlesung zurückführen.

Aufgabe P35 (Eigenschaften dualer Abbildungen).

Seien V, W, X endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Es seien $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ $g \in \mathrm{Hom}_K(W, X)$. Zeigen Sie:

(a) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

(b) Es gilt
$$f \text{ injektiv} \iff f^* \text{ surjektiv}$$

(c) Es gilt
$$f \text{ surjektiv} \iff f^* \text{ injektiv}$$

(d) Ist f ein Isomorphismus, so ist auch f^* ein Isomorphismus, und es gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Lösung:

(a) Sei $\varphi \in X^*$. Dann gilt:
$$(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = \underbrace{g^*(\varphi)}_{\in W^*} \circ f = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi).$$
$\Rightarrow (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(b) Es gilt
$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\iff \mathrm{Kern}(f) = \{0\} \\ &\iff \mathrm{Kern}(f)^0 = \{0\}^0 = V^* \\ &\overset{\text{Satz 22.14}}{\iff} \mathrm{Bild}(f^*) = V^* \\ &\iff f \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

Alternativ kann die Aufgabe auch elementar gelöst werden:

„$\Rightarrow$“: Sei f injektiv. Sei $\varphi \in V^*$ beliebig.
$\Rightarrow$ *$g : V \to U := \mathrm{Bild}(f), g(v) := f(v)$ ist bijektiv.*
$\Rightarrow$ *Es gibt eine Umkehrabbildung $g^{-1} : U \to V$.*
Sei U' ein Komplement des UVR $U \subset W$, d.h. $W = U \oplus U'$. Definiere
$$\psi : W = U \oplus U' \to K, \quad \psi(u + u') := \varphi \circ g^{-1}(u).$$
$\Rightarrow$ *$\psi \in W^*$, und für alle $v \in V$ gilt:*
$$[f^*(\psi)](v) = [\psi \circ f](v) = \psi(f(v)) = (\varphi \circ g^{-1})(f(v)) = \varphi(g^{-1}(f(v)) = \varphi(v),$$
d.h. $f^*(\psi) = \varphi$.

„$\Leftarrow$“: Sei f^* surjektiv.
Wir zeigen: f injektiv, d.h. $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.
Sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$, d.h. $f(v) = 0$.
Angenommen $v \neq 0$.
Vorlesung $\Rightarrow$ Es gibt $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$.
f^* surjektiv $\Rightarrow$ Es gibt $\psi \in W^*$ mit $f^*(\psi) = \varphi$.
$\Rightarrow 0 \neq \varphi(v) = [f^*(\psi)](v) = [\psi \circ f](v) = \psi(f(v)) = \psi(0) = 0,$
Widerspruch! Also $v = 0$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} f \text{ surjektiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Bild}(f) = W \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{Bild}(f)^0 = W^0 = \{0\} \\ &\overset{\text{Satz 22.14}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{Kern}(f^*) = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad f^* \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

Alternativ kann die Aufgabe auch elementar gelöst werden:

„$\Rightarrow$“: *Sei f surjektiv.*
Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in W^*$ mit $f^*(\varphi_1) = f^*(\varphi_2)$
$\Rightarrow \varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ f$.
Wir zeigen nun $\varphi_1 = \varphi_2$ mittels $\forall w \in W : \varphi_1(w) = \varphi_2(w)$.

Sei $w \in W$ beliebig.
f surjektiv $\Rightarrow$ Es gibt $v \in V$ mit $w = f(v)$
$\Rightarrow \varphi_1(w) = (\varphi_1 \circ f)(v) = (\varphi_2 \circ f)(v) = \varphi_2(w)$.

„$\Leftarrow$“: *Sei f^* injektiv.*
Angenommen, f nicht surjektiv. Dann existiert $w \in W \backslash Bild(f)$.
Sei $\mathcal{B}$ Basis von $Bild(f)$
$\Rightarrow \mathcal{B} \cup \{w\}$ *linear unabhängig in W.*
Sei $\psi \in W^*$ eine lineare Abbildung mit $\psi(w) \neq 0$, $\psi(v) = 0$ für $v \in \mathcal{B}$.
$\Rightarrow$ *Für alle $v \in V$ gilt: $[f^*(\psi)] = [\psi \circ f](v) = \psi(f(v)) = 0$.*
$\Rightarrow f^*(\psi) = 0$.
f^* injektiv $\Rightarrow \psi = 0$, Widerspruch zu $\psi(w) \neq 0$.

- *Alternative zu (b) oder (c): Angenommen, (b) ist bereits gezeigt und wir wollen (c) zeigen. Anwendung von (b) auf f^* liefert:*

$$f^* \textit{ surjektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad f^{**} \textit{ injektiv.}$$

Nach A... gilt $f^{**} \circ i = j \circ f$ bzw. $f = j^{-1} \circ f^{**} \circ i$.
$dim(V) < \infty \Rightarrow i, j$ Isomorphismen $\Rightarrow$

$$f^{**} \textit{ injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad f \textit{ injektiv.}$$

Damit folgt die Behauptung.

(d) Es gilt $id_V^* = id_{V^*}$ (*), denn: Sei $\varphi \in V^*$, so gilt

$$id_V^*(\varphi) = \varphi \circ id_V = \varphi = id_{V^*}(\varphi).$$

Es gilt

$$f^* \circ (f^{-1})^* \overset{(a)}{=} (f^{-1} \circ f)^* = id_V^* \overset{(*)}{=} id_{V^*},$$

und

$$(f^{-1})^* \circ f^* \overset{(a)}{=} (f \circ f^{-1})^* = id_W^* \overset{(*)}{=} id_{W^*},$$

$\Rightarrow (f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ *und f^* ist Isomorphismus.*

Alternative: Man kann auch erst mit (b)/(c) zeigen, dass f^* Isomorphismus ist und muss dann nur eine der beiden Richtungen $f^* \circ (f^{-1})^*$ oder $(f^{-1})^* \circ f^*$ nachrechnen. Argumentation für f^* Isomorphismus geht wie folgt:

- *Möglichkeit 1: f Isomorphismus $\overset{(b),(c)}{\Rightarrow}$ f^* Isomorphismus.*
- *Möglichkeit 2: f Isomorphismus $\overset{(b)}{\Rightarrow}$ $f^* : W^* \to V^*$ surjektiv, $dim(V) = dim(W)$.*
  $\Rightarrow dim(V^*) = dim(V) = dim(W) = dim(W^*)$
  $\overset{f^* \text{ surjektiv}}{\Rightarrow}$ f^* Isomorphismus.

Aufgabe P36 (Lineare Unabhängigkeit zwischen zwei Linearformen).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ Linearformen auf V. Zeigen Sie:

(a) $\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi_1)) \geq n - 1$.

(b) Ist $\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi_1) \cap \mathrm{Kern}(\varphi_2)) \geq n - 1$, so sind φ_1, φ_2 linear abhängig in V^*.

(c) Sind $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$, so gilt

$$\mathrm{Kern}(\varphi_1) = \mathrm{Kern}(\varphi_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2 \text{ sind lin. abh. in } V^*.$$

Lösung:

(a) Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$n = \dim_K(V) = \underbrace{\dim_K(\underbrace{\mathrm{Bild}(\varphi_1)}_{\subset K})}_{\leq 1} + \dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi_1))$$

$\Rightarrow \dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi_1)) \geq n - 1$.

(b) Voraussetzung $\Rightarrow$ Seien $(v_1, ..., v_{n-1})$ linear unabhängig in $\mathrm{Kern}(\varphi_1) \cap \mathrm{Kern}(\varphi_2)$.
Ergänze diese Familie zu einer Basis $(v_1, ..., v_n)$ von V.
A... $\Rightarrow \varphi_1 = \sum_{j=1}^n \varphi_1(v_j)v_j^* = \varphi_1(v_n)v_n^*$, $\varphi_2 = \sum_{j=1}^n \varphi_2(v_j)v_j^* = \varphi_2(v_n)v_n^*$
Fall 1: $\varphi_1(v_n) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0 \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ linear abhängig in V^*.
Fall 2: $\varphi_1(v_n) \neq 0 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_2(v_n) \cdot \varphi_1(v_n)^{-1}\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ linear abhängig in V^*.

(c) „$\Rightarrow$“: Voraussetzung $\Rightarrow \mathrm{Kern}(\varphi_1) \cap \mathrm{Kern}(\varphi_2) = \mathrm{Kern}(\varphi_1) \overset{(a)}{\Rightarrow} \dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi_1) \cap \mathrm{Kern}(\varphi_2)) = \dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi_1)) \geq n - 1$.
$\overset{(b)}{\Rightarrow} \varphi_1, \varphi_2$ sind lin. abh. in V^*.

„$\Leftarrow$“: Seien φ_1, φ_2 lin. abh.
$\varphi_1, \varphi_2 \neq 0 \Rightarrow$ Es gibt $\lambda \in K \backslash \{0\}$ mit $\varphi_1 = \lambda \cdot \varphi_2$.
$\Rightarrow \mathrm{Kern}(\varphi_1) = \mathrm{Kern}(\varphi_2)$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`