Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

9. Präsenzblatt

Aufgabe P33 (Charakterisierung von Linearformen/Annulatoren im Polynomraum).

Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad höchstens 2 über $\mathbb{R}$, und den Standardvektorraum $W := \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Es bezeichne $E := (1, t, t^2)$ die Monombasis von V, und $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von W.

(a) Wir betrachten die Linearform $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = \int_0^1 p(t)dt$. Sei $g : W \to V$, $e_i \mapsto t^{i-1}$. Berechnen Sie $g^*(\varphi)$.

Sei $U := \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ mit $v_1 := t + 1, v_2 = t^2 - 2$ ein UVR von V.

(b) Berechnen Sie eine Basis von U^0 in Termen von E^*.

Gegeben sei nun die lineare Abbildung

$$f : V \to W, \quad f(p) := \big(p(0), p(1), p(-1)\big)^t.$$

(c) Berechnen Sie eine Basis (w_1, w_2) von $X := f(U)$, und berechnen Sie X^0 auf zwei verschiedene Weisen:

  (i) Ergänzen Sie (w_1, w_2) mit $w_3 = (0, 1, 0)^t$ zu einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von W und nutzen Sie $X^0 = \mathrm{Lin}(w_3^*)$.

  (ii) Statten Sie W mit dem Standardskalarprodukt aus und berechnen Sie $X^0 = \Psi(X^\perp)$, wobei $\Psi : W \to W^*$ den zugehörigen kanonischen Isomorphismus bezeichnet.

(d) Ermitteln Sie U^0 aus X^0.
Hinweis: Nutzen Sie die Pullback-Formel aus A34(c).

(e) Zeigen Sie, dass $U = \{p \in V : -2p(0) + p(1) + 3p(-1) = 0\}$.
Hinweis: Nutzen Sie P34(c).

Aufgabe P34 (Eigenschaften des Annulators).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U, U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^0 \subset U_1^0$.

(b) $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.

(c) Sei $\dim_K(V) < \infty$. Definiere $\tilde{U} := \{v \in V \,|\, \forall\, \varphi \in U^0 : \varphi(v) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $\tilde{U} = U$.

Sei nun W ein weiterer K-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ und nun $U \subset W$ ein UVR.

(d) Zeigen Sie, dass $f^*(U^0) \subset (f^{-1}(U))^0$. Gilt $\dim_K(V) < \infty$ und $\dim_K(W) < \infty$, so gilt sogar Gleichheit (die sogenannte *Pushforward-Formel*).

Inwiefern können die Beweise von (a),(b) vereinfacht werden, wenn $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Euklidischer Raum ist?*

Aufgabe P35 (Eigenschaften dualer Abbildungen).
Seien V, W, X endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Es seien $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ $g \in \mathrm{Hom}_K(W, X)$. Zeigen Sie:

(a) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

(b) Es gilt
$$f \text{ injektiv} \iff f^* \text{ surjektiv}$$

(c) Es gilt
$$f \text{ surjektiv} \iff f^* \text{ injektiv}$$

(d) Ist f ein Isomorphismus, so ist auch f^* ein Isomorphismus, und es gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Aufgabe P36 (Lineare Unabhängigkeit zwischen zwei Linearformen).
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ Linearformen auf V. Zeigen Sie:

(a) $\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi_1)) \geq n - 1$.

(b) Ist $\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi_1) \cap \mathrm{Kern}(\varphi_2)) \geq n - 1$, so sind φ_1, φ_2 linear abhängig in V^*.

(c) Sind $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$, so gilt
$$\mathrm{Kern}(\varphi_1) = \mathrm{Kern}(\varphi_2) \iff \varphi_1, \varphi_2 \text{ sind lin. abh. in } V^*.$$

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`