Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

8. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P29 (Berechnung von Isometrie-Normalformen).

Sei $A \in \mathrm{O}(n)$. Definiere $B := \frac{1}{2}(A + A^t) \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Es sei

$$\begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_s & & & \\ & & A(\alpha_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_i \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ die Isometrie-Normalform von A. Zeigen Sie:

(a) B besitzt genau die Eigenwerte $\cos(\alpha_i)$, $i = 1, ..., k$ (mit $\mu_{geo}(\cos(\alpha_i))$ gerade) und $1, -1$. Es gilt $\mathrm{Eig}(B, 1) = \mathrm{Eig}(A, 1)$ und $\mathrm{Eig}(B, -1) = \mathrm{Eig}(A, -1)$.

Sei nun $\lambda = \cos(\alpha_i) \in (-1, 1)$ ein Eigenwert von B mit zugehörigem Eigenvektor v.
Zeigen Sie:

(b) Die Familie (v, Av) ist linear unabhängig in $\mathrm{Eig}(B, \lambda)$ und für $W := \mathrm{Lin}(v, Av)$ gilt $\tilde{A}(W) \subseteq W$.

(c) Sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von W. Dann gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\tilde{A}|_W) = \begin{pmatrix} \lambda & -\sqrt{1-\lambda^2} \\ \sqrt{1-\lambda^2} & \lambda \end{pmatrix} = A(\alpha_i)$.

Lösung:

(a) $A \in \mathrm{O}(n) \overset{\text{A29}}{\Longrightarrow} \exists T \in \mathrm{O}(n)$:

$$T^t A T = \begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_s & & & \\ & & A(\alpha_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A(\alpha_k) \end{pmatrix} =: C,$$

$\Longrightarrow T^t B T = T^t \frac{1}{2}(A + A^t) T = \frac{1}{2}(T^t A T + (T^t A^t T)^t) = \frac{1}{2}(C + C^t)$.
Form von $A(\alpha_i)$, $i = 1, ..., k \implies \frac{1}{2}(C + C^t)$ hat Diagonalgestalt mit Einträgen $1, -1, \cos(\alpha_i)$ (letztere jeweils doppelt).
$T^t = T^{-1} \Rightarrow B$ hat genau die Eigenwerte $1, -1, \cos(\alpha_i)$ und $\mu_{geo}(\cos(\alpha_i))$ ist gerade.

Sei $T = (t_1, ..., t_n)$ (Spalten von T).
$\Rightarrow \mathrm{Eig}(B, 1) = \mathrm{Lin}(t_1, ..., t_r) = \mathrm{Eig}(A, 1)$ und $\mathrm{Eig}(B, -1) = \mathrm{Lin}(t_{r+1}, ..., t_s) = \mathrm{Eig}(A, -1)$.

(b) v EV $\implies v \neq 0 \overset{A \text{ orthog.}}{\Longrightarrow} Av \neq 0$.
Angenommen, (v, Av) linear abhängig $\Rightarrow$ Es gibt $\mu \in \mathbb{R}$ mit $Av = \mu v \Rightarrow v \in \mathrm{Eig}(A, \mu)$ $\Rightarrow \mu \in \{-1, +1\} \Rightarrow v \in \mathrm{Eig}(A, \pm 1) \Rightarrow v \in \mathrm{Eig}(B, \pm 1)$, Widerspruch zu $v \in \mathrm{Eig}(B, \lambda)$.

Zeige $\tilde{A}(W) \subseteq W$. Sei $w \in W$. $\Rightarrow w = \mu_1 v + \mu_2 Av$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow Aw = \mu_1 Av + \mu_2 A^2 v \overset{2AB = A^2 + AA^t = A^2 + E_n}{=} \mu_1 Av + \mu_2(2AB - E_n)v \overset{v \in \mathrm{Eig}(B,\lambda)}{=} \mu_1 Av + \mu_2(2\lambda Av - v) \in W$.

(c) Nach (c): $\mathcal{C} = (v, Av)$ ist Basis von W und $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\tilde{A}|_W) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\lambda \end{smallmatrix}\right)$.
Führe die Gram-Schmidt Orthogonalisierung durch:

- $w_1 := \frac{v}{\|v\|}$.
- $\tilde{w}_2 := Av - \langle Av, w_1\rangle w_1 \implies w_2 := \frac{\tilde{w_2}}{\|\tilde{w}_2\|}$.

Sei $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$. Bestimme nun $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\tilde{A}|_W) = \left(\Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(Aw_1) \quad \Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(Aw_2)\right)$, d.h. Aw_i in Formeln von w_j.

- $Aw_1 = \|v\|^{-1}Av = \|v\|^{-1}\left(\|Av - \langle Av, w_1\rangle w_1\|w_2 + \langle Av, w_1\rangle w_1\right)$
$= \|Aw_1 - \langle Aw_1, w_1\rangle w_1\|w_2 + \langle Aw_1, w_1\rangle w_1 = \sqrt{1-\lambda^2}\, w_2 + \lambda w_1$, wegen
  (i) $\langle Aw_1, w_1\rangle = w_1^t A w_1 = \frac{1}{2}(w_1^t A w_1 + w_1^t A^t w_1) = w_1^t B w_1 = \lambda\|w_1\|^2 = \lambda$ und
  (ii) $\|Aw_1 - \langle Aw_1, w_1\rangle w_1\|^2 = \|(A - \lambda E_n)w_1\|^2 = w_1^t(A - \lambda E_n)^t(A - \lambda E_n)w_1$
  $= w_1^t((\lambda^2+1)E_n - 2\lambda B)w_1 = (1-\lambda^2)\|w_1\|^2 = 1 - \lambda^2$.
- Es ist
  (i) $A\tilde{w}_2 = A^2v - \langle Aw_1, w_1\rangle Av = 2\lambda Av - v - \langle Aw_1, w_1\rangle Av = \lambda Av - v$
  $= \lambda\|v\|(\lambda w_1 + \sqrt{1-\lambda^2}\, w_2) - \|v\|w_1$ und
  (ii) $\|\tilde{A}(\tilde{w}_2)\|^2 = \|\|v\|((\lambda^2-1)w_1 + \lambda\sqrt{1-\lambda^2}\, w_2)\|^2$
  $\overset{(w_1,w_2)\text{ orthon.}}{=} \|v\|^2((\lambda^2-1)^2 + (\lambda\sqrt{1-\lambda^2})^2) = \|v\|^2(1-\lambda^2)$.
  $\implies \tilde{A}w_2 = Aw_2 = -\sqrt{1-\lambda^2}\, w_1 + \lambda w_2$.

Aufgabe P30 (Bestimmen von Isometrie-Normalform und Hauptachsentransformation).

Sei $V := \mathbb{R}^3$ und $(V, \langle ., \rangle)$ der Euklidische Vektorraum ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$$

(a) Bestimmen Sie die Isometrie-Normalform von $\tilde{A} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ sowie eine Matrix $T \in \mathrm{O}(3)$, so dass T^tAT in Isometrie-Normalform ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathrm{SO}(3)$, so dass T^tBT Diagonalgestalt besitzt. Ermitteln Sie daraus Signatur(B).

Lösung:

(a)
- $B := \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
$\implies \chi_B = \det(tE_3 - B) = \begin{vmatrix} t-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & t+\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & t-\frac{2}{3} \end{vmatrix} = [(t-\frac{1}{3})(t+\frac{2}{3}) - \frac{4}{9}](t-\frac{2}{3}) = (t+1)(t-\frac{2}{3})^2$.
$\implies$ Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \frac{2}{3}$.
P29(a) $\Rightarrow$ Isometrie-Normalform von B ist

$$I = \begin{pmatrix} -1 & \\ & A(\cos^{-1}(\frac{2}{3})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Bestimme ONB von $\mathrm{Eig}(B,1)$: Entfällt.
  Bestimme ONB von $\mathrm{Eig}(B,-1)$:
  $\mathrm{Eig}(B,-1) = \mathrm{Lös}(-E_3 - B, 0)$. Es ist

$$-E_3 - B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{sZSF}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  $\Longrightarrow\ \mathrm{Eig}(B,-1) = \mathrm{Lin}((\frac{1}{2},1,0)^t)$.
  Normierung liefert den Vektor $x_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)^t$.

- Bestimme eine Basis von $\mathrm{Eig}(B,\frac{2}{3})$:
  $\mathrm{Eig}(B,\frac{2}{3}) = \mathrm{Lös}(\frac{2}{3}E_3 - B, 0)$. Es ist

$$\frac{2}{3}E_3 - B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{sZSF}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  $\Longrightarrow\ \mathrm{Eig}(B,\frac{2}{3}) = \mathrm{Lin}((0,0,1)^t, (-2,1,0)^t)$.
  Setze $\mathcal{B}_1 := (v_{11}, v_{12}) := ((0,0,1)^t, (-2,1,0)^t)$.
  Wähle $v_{1j_1} := v_{11}$ und $\mathrm{Lin}(v_{1j_1}, Av_{1j_1}) = \mathrm{Lin}((0,0,1)^t, (-2,1,2)^t)$.
  Gram-Schmidt Orthogonalisierung ergibt:

  (1.) $w_{1j_1} := v_{1j_1} = v_{11} = (0,0,1)^t$ (bereits normiert),
  (2.) $\tilde{w}'_{1j_1} := v_{12} - \langle v_{11}, v_{12}\rangle v_{11} = v_{12} - 2v_{11} = (-2,1,0)^t$
  $\Longrightarrow\ w'_{1j_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^t$.

- Erhalte die ONB $\mathcal{B} = (x_1, w_{1j_1}, w'_{1j_1})$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  und

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = T^tAT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(b)
- Ermittle χ_B:
  $\chi_B = \det(tE_3 - B) = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} (t+1)(t-2)^2$.
  $\Longrightarrow$ Eigenwerte von B sind $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

- Bestimme die Eigenräume zu den Eigenwerten λ_1, λ_2:
  - $\mathrm{Eig}(B,-1)$:
    Es gilt

$$-E_3 - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{sZSF}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    $\Longrightarrow\ \mathrm{Eig}(B,-1) = \mathrm{Lös}(-E_3 - B, 0) = \mathrm{Lin}((1,1,1)^t)$.

- $\mathrm{Eig}(B,2)$:
  Es gilt

$$2E_3 - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{sZSF}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  $\Longrightarrow \mathrm{Eig}(B,2) = \mathrm{Lös}(2E_3 - B, 0) = \mathrm{Lin}((-1,1,0)^t, (-1,0,1)^t)$.

- – Normiere $\mathrm{Lin}((1,1,1)^t)$ und erhalte $w_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t$
  – Mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung finde ONB von $\mathrm{Eig}(B,2)$:
    (i) $\tilde{w}_2 := (-1,1,0)^t \Longrightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^t$.
    (ii) $\tilde{w}_3 := (-1,0,1)^t - \langle w_2, (-1,0,1)^t\rangle w_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^t$
    $\Longrightarrow w_3 := \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^t$
  – Es gilt bereits $\mathrm{Eig}(B,-1) \perp \mathrm{Eig}(B,2)$.
- $\Longrightarrow \mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ ist ONB, sodass mit $T := (w_1, w_2, w_3) \in \mathrm{O}(3)$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\tilde{B}) = T^t B T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P31 (Rechnen mit dualen Basen).
Sei $V := \mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und sei die Basis $\mathcal{B} := (b_1, b_3, b_3)$ gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiter sei $\mathcal{B}^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*.

(a) Bestimmen Sie explizit die duale Basis $\mathcal{B}^*$, d.h., geben Sie Zeilenvektoren $w_i \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an mit $b_i^* = \tilde{w}_i$.

(b) Sei $a := (4,-2,-3)^t$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle v, a\rangle$. Schreiben Sie φ als Linearkombination der dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

Sei nun $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 und (p_0, p_1, p_2) die Monombasis.

(c) Schreiben Sie die Linearform $\varphi : V \to \mathbb{R}, p \mapsto \int_0^1 p(x)dx$ als Linearkombination von p_0^*, p_1^*, p_2^*.

Lösung:

(a) Möglichkeit 1 (nutze (a)): Es sei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. $\Rightarrow$

$$T_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{A31(a)} \Rightarrow T_{E^*}^{\mathcal{B}^*} = ((T_E^{\mathcal{B}})^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow b_1^* = e_1^* = \widetilde{e_1^t} = \tilde{w}_1$ mit $w_1 = (1,0,0)$.
$b_2^* = \tilde{w}_2$, $b_3^* = \tilde{w}_3$ mit $w_2 = (1,-1,0)$, $w_3 = (0,-3,1)$.

Möglichkeit 2 ("direkt"): Bestimme $M^E_{e_1}(b_1^*) = M^{\mathcal{B}}_{e_1}(b_1^*) \cdot T^E_{\mathcal{B}} = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{e_1}(b_1^*)}_{\substack{\text{Def. } b_1^* \\ =(1,0,0)}} \cdot \underbrace{(T^{\mathcal{B}}_E)^{-1}}_{=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}} =$ $(1,0,0) =: w_1$.

Analog: $w_2 = (1,-1,0)$, $w_3 = (0,-3,1)$.

(b) Es ist
$$M^E_{e_1}(\varphi) = (4,-2,-3).$$
$\Rightarrow$
$$M^{\mathcal{B}}_{e_1}(\varphi) = M^E_{e_1}(\varphi) \cdot T^{\mathcal{B}}_E = (4,-2,-3) \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix} = (-7, 11, -3).$$
$\Rightarrow \varphi = -7b_1^* + 11b_2^* - 3b_3^*$.

(c) Sei $\mathcal{B} := (p_0, p_1.p_2) = (1, t, t^2)$.
Es ist
$$\varphi(p_0) = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1, \quad \varphi(p_1) = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \quad \varphi(p_2) = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$
$\Longrightarrow\ M^{\mathcal{B}}_{e_1}(\varphi) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.
$\Longrightarrow\ \varphi = p_0^* + \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{3}p_2^*$.
Zur Veranschaulichung:
Es gilt für gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$*:*
$$\varphi = \lambda_1 p_0^* + \lambda_2 p_1^* + \lambda_3 p_2^*.$$
Nach Definition von (p_0^*, p_1^*, p_2^*) *gilt:*
$$\varphi(p_0) = \lambda_1, \qquad \varphi(p_1) = \lambda_2, \qquad \varphi(p_2) = \lambda_3$$
(da z.B. $\varphi(p_0) = (\lambda_1 p_0^* + \lambda_2 p_1^* + \lambda_3 p_2^*)(p_0) = \lambda_1$*).*
Es folgt die Aussage mit
$$\varphi(p_0) = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1, \quad \varphi(p_1) = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \quad \varphi(p_2) = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe P32 (Anwendung: Hauptachsentransformation).
Sei $B \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $r := \mathrm{Rang}(B)$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang}(B^tB)$, und B^tB ist positiv semidefinit.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(B^tB)$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $U \in O(n)$ gibt und $s_1, ..., s_r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $U^tB^tBU = \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Zeigen Sie die sogenannte *Singulärwertzerlegung*: Es gibt $U \in O(n)$, $V \in O(m)$ und $\sigma_1, ..., \sigma_r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $V^tBU = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R})$.
Hinweis: Wählen Sie $U = (u_1, ..., u_n)$ *wie in (b), definieren Sie* $\sigma_j := \sqrt{s_j}$ *und* $V = (v_1, ..., v_m)$ *durch* $v_j := \sigma_j^{-1}Bu_j$ $(j = 1, ..., r)$*.*

Lösung:

(a) Wir zeigen $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(B^tB)$.
„$\subset$“: $x \in \mathrm{Kern}(B) \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow B^tBx = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Kern}(B^tB)$.
„$\supset$“: $x \in \mathrm{Kern}(B^tB) \Rightarrow B^tBx = 0 \Rightarrow (Bx)^t(Bx) = x^tB^tBx = 0 \Rightarrow$.
Standard-Skalarprodukt pos. def. $\Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Kern}(B)$.

Es folgt $\mathrm{Rang}(B) = n - \dim(\mathrm{Kern}(B)) = n - \dim(\mathrm{Kern}(B^tB)) = \mathrm{Rang}(B^tB)$.

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $x^tB^tBx = (Bx)^t(Bx) \geq 0$ (Standard-Skalarprodukt ist pos. def.).
$\Rightarrow B^tB$ ist positiv semidefinit.

(b) $B^tB \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch positiv semidefinit, Spektralsatz $\Rightarrow$ Es gibt $U \in O(n)$ mit $U^tB^tBU = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \cdots & \\ & & s_n \end{pmatrix}$, und $s_1 \geq ... \geq s_n$ sind die Eigenwerte von B^tB (Reihenfolge darf vorgegeben werden, da Permutationsmatrizen orthogonal sind).
(a) $\Rightarrow \mathrm{Rang}(B^tB) = \mathrm{Rang}(B) = r$.
U orthogonal $\Rightarrow B^tB$ und $\begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \cdots & \\ & & s_n \end{pmatrix}$ sind äquivalent $\Rightarrow r = \mathrm{Rang}(B^tB) = \mathrm{Rang}(\begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \cdots & \\ & & s_n \end{pmatrix})$
$\Rightarrow s_{r+1} = ... = s_n = 0$.

(c) Sei $\sigma_j := \sqrt{s_j}$, $i = 1, ..., r$. Seien $U = (u_1, ..., u_n)$ die Spalten von U und $v_j := \sigma_j^{-1}Bu_j$, $j = 1, ..., r$.
$\Rightarrow$ Für $j, k \in \{1, ..., r\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle v_j, v_k \rangle &= (\sigma_j^{-1}Bu_j)^t(\sigma_k^{-1}Bu_k) = (\sigma_j\sigma_k)^{-1}u_j \underbrace{A^tB}_{\overset{(b)}{=} U\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_k,0,...,0)U^t} u_k \\ &\overset{U^tu_k = e_k}{=} (\sigma_j\sigma_k)^{-1}e_j^t \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} e_k = \delta_{jk}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow (v_1, ..., v_r)$ ist orthonormal und unabhängig.
Ergänze zu einer ONB $(v_1, ..., v_m)$ von $\mathbb{R}^m$.
Wir zeigen nun $B = V \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{=:D} U^t$ auf der ONB $u_1, ..., u_n$:

- Fall $j \in \{1, ..., r\}$:

$$(VDU^t)u_j = VDe_j = V\sigma_je_j = v_j\sigma_j \overset{\text{Def. } v_j}{=} Bu_j.$$

- Fall $j > r$:

$$(VDU^t)u_j = VDe_j = 0 = Bu_j,$$

da $(Bu_j)^tBu_j = e_j^t(U^tB^tBU)e_j \overset{(b)}{=} 0$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`