UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

8. Präsenzblatt

Aufgabe P29 (Berechnung von Isometrie-Normalformen).
Sei $A \in \mathrm{O}(n)$. Definiere $B := \frac{1}{2}(A + A^t) \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Es sei

$$\begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_s & & & \\ & & A(\alpha_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_i \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ die Isometrie-Normalform von A. Zeigen Sie:

(a) B besitzt genau die Eigenwerte $\cos(\alpha_i)$, $i = 1, ..., k$ (mit $\mu_{geo}(\cos(\alpha_i))$ gerade) und $1, -1$. Es gilt $\mathrm{Eig}(B, 1) = \mathrm{Eig}(A, 1)$ und $\mathrm{Eig}(B, -1) = \mathrm{Eig}(A, -1)$.

Sei nun $\lambda = \cos(\alpha_i) \in (-1, 1)$ ein Eigenwert von B mit zugehörigem Eigenvektor v.
Zeigen Sie:

(b) Die Familie (v, Av) ist linear unabhängig in $\mathrm{Eig}(B, \lambda)$ und für $W := \mathrm{Lin}(v, Av)$ gilt $\tilde{A}(W) \subseteq W$.

(c) Sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von W. Dann gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\tilde{A}|_W) = \begin{pmatrix} \lambda & -\sqrt{1-\lambda^2} \\ \sqrt{1-\lambda^2} & \lambda \end{pmatrix} = A(\alpha_i)$.

Aufgabe P30 (Bestimmen von Isometrie-Normalform und Hauptachsentransformation).
Sei $V := \mathbb{R}^3$ und $(V, \langle ., . \rangle)$ der Euklidische Vektorraum ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

(a) Bestimmen Sie die Isometrie-Normalform von $\tilde{A} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ sowie eine Matrix $T \in \mathrm{O}(3)$, so dass $T^t A T$ in Isometrie-Normalform ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathrm{SO}(3)$, so dass $T^t B T$ Diagonalgestalt besitzt. Ermitteln Sie daraus Signatur(B).

Aufgabe P31 (Rechnen mit dualen Basen).
Sei $V := \mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und sei die Basis $\mathcal{B} := (b_1, b_3, b_3)$ gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiter sei $\mathcal{B}^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*.

(a) Bestimmen Sie explizit die duale Basis $\mathcal{B}^*$, d.h., geben Sie Zeilenvektoren $w_i \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an mit $b_i^* = \tilde{w}_i$.

(b) Sei $a := (4, -2, -3)^t$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle v, a \rangle$. Schreiben Sie φ als Linearkombination der dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

Sei nun $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 und (p_0, p_1, p_2) die Monombasis.

(c) Schreiben Sie die Linearform $\varphi : V \to \mathbb{R}, p \mapsto \int_0^1 p(x)dx$ als Linearkombination von p_0^*, p_1^*, p_2^*.

Aufgabe P32 (Anwendung: Hauptachsentransformation).
Sei $B \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $r := \mathrm{Rang}(B)$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang}(B^tB)$, und B^tB ist positiv semidefinit.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(B^tB)$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $U \in O(n)$ gibt und $s_1, ..., s_r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $U^tB^tBU = \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Zeigen Sie die sogenannte *Singulärwertzerlegung*: Es gibt $U \in O(n)$, $V \in O(m)$ und $\sigma_1, ..., \sigma_r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $V^tBU = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R})$.
Hinweis: Wählen Sie $U = (u_1, ..., u_n)$ *wie in (b), definieren Sie* $\sigma_j := \sqrt{s_j}$ *und* $V = (v_1, ..., v_m)$ *durch* $v_j := \sigma_j^{-1} B u_j$ $(j = 1, ..., r)$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`