Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

7. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P25 (Orthogonale Komplemente in ∞-dimensionalen Euklidischen Räumen).

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein Euklidischer Raum (nicht notwendig endlichdimensional) und $U, W \subseteq$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) $V^\perp = \{0\}$ und $\{0\}^\perp = V$,

(b) $U \subseteq W \implies W^\perp \subseteq U^\perp$,

(c) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, und $U^\perp = ((U^\perp)^\perp)^\perp$. *Bemerkung: Im Gegensatz zu endlichdimensionalen Euklidischen Räumen gilt im Allgemeinen nicht $U = (U^\perp)^\perp$, vgl. (e).*

Der Untervektorraum $V := C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | \ f \text{ stetig}\} \subset \mathrm{Abb}([0,1], \mathbb{R})$ der stetigen Abbildungen ist zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \langle p, q \rangle := \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$ ein ∞-dimensionaler Euklidischer Raum.
Gegeben sei der UVR $U := \{f \in V : f(0) = 0\} \subset V$. Zeigen Sie:

(d) $U^\perp = \{0\}$,

(e) $U \neq (U^\perp)^\perp$.

Lösung:

(a)
- „$\{0\} \subseteq V^\perp$“: klar.
  „$\{0\} \supseteq V^\perp$“: Sei $w \in V^\perp$.
  $\implies \forall v \in V : \langle w, v \rangle = 0$.
  $\overset{\langle .,. \rangle \text{ nicht ausgeartet}}{\implies} w = 0 \implies \{w\} \in \{0\}$.
- „$\{0\}^\perp \subseteq V$“: klar.
  „$\{0\}^\perp \supseteq V$“: Sei $v \in V$ beliebig.
  $\implies \langle v, 0 \rangle = 0$.
  $\implies \forall u \in \{0\} : \langle v, u \rangle = 0$.
  $\implies v \in \{0\}^\perp$.

(b) Sei $v \in W^\perp$. Sei $u \in U$ beliebig. $\overset{U \subseteq W}{\Rightarrow} u \in W \overset{v \in W^\perp}{\Rightarrow} \langle v, u \rangle = 0$
$\Rightarrow v \in U^\perp$.

(c)
- „$U \subset (U^\perp)^\perp$“: Sei $u \in U$.
  Sei $v \in U^\perp$ beliebig.
  $\Rightarrow \langle v, u \rangle \overset{\text{Def. } U^\perp}{=} 0$.
  $\overset{\text{Def. } (U^\perp)^\perp}{\Rightarrow} u \in (U^\perp)^\perp$.

- „$U^\perp = ((U^\perp)^\perp)^\perp$“:
  „$\subset$“: Klar aus erstem Teil (setze $\tilde{U} = U^\perp$).
  „$\supset$“: Sei $v \in ((U^\perp)^\perp)^\perp$.
  Sei $u \in U$ beliebig.
  $\overset{U \subset (U^\perp)^\perp}{\Rightarrow} \quad u \in (U^\perp)^\perp$
  $\overset{v \in ((U^\perp)^\perp)^\perp}{\Rightarrow} \quad \langle v, u \rangle = 0.$

(d) Die Inklusion „$\{0\} \subseteq U^\perp$“ ist klar.
Zeige „$U^\perp \subseteq \{0\}$“. Sei $g \in U^\perp$, d.h.

$$\forall f \in U: \qquad \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$$

Insbesondere gilt für die Abbildung $h \in U$ mit $h := \mathrm{id}_V g$

$$0 = \langle g, h \rangle = \int_0^1 tg(x)g(x)\mathrm{d}x = \|\sqrt{t}g\|^2$$

$\Longrightarrow \ \forall x \in [0,1] : \sqrt{x}g(x) = 0.$
$\Longrightarrow \ \forall x \in (0,1] : g(t) = 0.$
$\overset{g \in C[0,1]}{\Longrightarrow} \ \forall x \in [0,1] : g(x) = 0.$
$\Longrightarrow \ g = 0.$
Damit folgt: $U^\perp \subset \{0\}$, d.h. $U^\perp = \{0\}$.

(e) $(U^\perp)^\perp \overset{(d)}{=} \{0\}^\perp \overset{(a)}{=} V \neq U.$

Zur Anschauung (im Unendlichdimensionalen): Das orthogonale Komplement $U^\perp$ gibt an, welche Funktionen NICHT in U liegen oder mit Elementen aus U beliebig gut gemäß dem Abstand $\|f-u\|^2 = \int_0^1 |f(x) - u(x)|^2 \mathrm{d}x$ (*) approximiert werden können. Die formale Verbindung ergibt sich dadurch, dass

$$\inf_{u \in U} \|f - u\|^2 = \|f - \hat{u}\|^2$$

genau dann gilt, wenn $f - \hat{u} \perp U$ gilt, d.h. $f - \hat{u} \in U^\perp$. Damit sammelt $U^\perp$ gerade die Differenzvektoren von f zu dem optimal möglichen Element aus U. Ist $U^\perp = \{0\}$, so bedeutet das, dass jedes Element $f \in V$ beliebig gut durch Elemente $\hat{u} \in U$ approximiert werden können.
Das Integral (*) ignoriert den einzelnen Wert an der Stelle $x = 0$; eine stetige Funktion $f \in V$ kann beliebig gut durch stetige Funktionen u mit $u(0) = 0$ angenähert werden, wenn $u(x)$ für kleine x nur "schnell genug" zu $f(x)$ anwächst. Der dabei gemachte Fehler mit (*), d.h. die Fläche zwischen f und u ist beliebig klein. Daher ergibt sich hier $U^\perp = \{0\}$; es gibt keine stetige Funktion, die nicht ausreichend gut durch Elemente aus U approximiert werden kann. Ein Unterschied zwischen U und $(U^\perp)^\perp$ entsteht also zum Beispiel, wenn alle Elemente aus V beliebig gut durch Elemente aus U approximiert werden können bzgl. des Abstands, der durch das Skalarprodukt vorgegeben wird.

Aufgabe P26 (Orthogonale Komplemente in ∞-dimensionalen Euklidischen Vektorräumen).

Sei $V := C[-1,1] := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\} \subset \mathrm{Abb}([-1,1], \mathbb{R})$ der Untervektorraum der stetigen Abbildungen. Zusammen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Gegeben seien weiter die folgenden UVR von V:

$$\begin{aligned} G &:= \{f \in V \,|\, \forall x \in [-1,1] : \ f(-x) = f(x)\}, \\ U &:= \{f \in V \,|\, \forall x \in [-1,1] : \ f(-x) = -f(x)\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $V = G \oplus U$.
Hinweis: Definieren Sie für $f \in V$ die Abbildung $g \in V$ durch $g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

(b) Zeigen Sie, dass $G^\perp = U$.
Bemerkung: Analog kann man zeigen, dass $U^\perp = G$.

(c) Folgern Sie, dass $V = G \oplus G^\perp$ und $(G^\perp)^\perp = G$ (d.h. in diesem Spezialfall gelten hier Gleichheiten, obwohl V unendlichdimensional ist).

Lösung:

(a) Zu zeigen ist nur $V \subset G \oplus U$, die andere Richtung ist klar wegen $G, U \subset V$.
Sei $f \in V$. Definiere g wie angegeben und $u \in V$ durch

$$u(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

(Komposition stetiger Funktionen sind stetig, daher $g, u \in V$).
Sei $x \in [-1, 1]$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g(x) + u(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x),\\
g(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = g(x),\\
u(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -u(x).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f = g + u$, $g \in G$, $u \in U$.
$\Rightarrow f \in G \oplus U$.

(b) „$U \subset G^\perp$“: Sei $u \in U$. Sei $g \in G$ beliebig.
Sei $x \in [-1, 1] \Rightarrow u(-x)g(-x) = -u(x)g(x) \Rightarrow u \cdot g$ ist ungerade.
$\Rightarrow \langle u, g\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)g(x)dx = 0$.
$\Rightarrow u \in G^\perp$. „$G^\perp \subset U$“: Sei $u \in G^\perp \subset V$.
$\overset{(a)}{\Rightarrow}$ Es gibt $u_1 \in U$, $g_1 \in G$ mit $u = g_1 + u_1$.
$g_1 \in G$, $u \in G^\perp \Rightarrow \Rightarrow 0 = \langle u, g_1\rangle = \langle g_1, g_1\rangle + \langle u_1, g_1\rangle$.
$u_1 \cdot g_1$ ungerade $\Rightarrow \langle u_1, g_1\rangle = \int_{-1}^{1} u_1(x)g_1(x)dx = 0$.
$\Rightarrow 0 = \langle g_1, g_1\rangle = \|g_1\|^2$. $\|\cdot\|$ definit $\Rightarrow g_1 = 0 \Rightarrow u = u_1 \in U$.

(c) (a) $\Rightarrow V = G \oplus U = G \oplus G^\perp$,
außerdem $(G^\perp)^\perp \overset{(b)}{=} U^\perp \overset{\text{Bemerkung (b)}}{=} G$.

Aufgabe P27 (Isometrien auf $\mathbb{R}^2$).
Es sei $\mathbb{R}^2$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und $f_i \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^2)$ $(i = 1, 2)$, wobei $f_i = \tilde{B}_i$ mit

$$B_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt und $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ das durch A induzierte Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass B_1 orthogonal ist.

(b) Ist f_1 eine Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$?

(c) Sei eine Basis von $\mathbb{R}^2$ durch $\mathcal{B} = ((1,0)^t, (1,1)^t)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_1)$ nicht orthogonal ist. Wieso ist dies nicht der Fall?

(d) Ist f_1 eine Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$?

(e) Zeigen Sie, dass f_2 eine Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ ist.

(f) Geben Sie eine weitere Isometrie $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ verschieden von der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ und f_2 an.

Lösung:

(a) Es gilt $B_1^t B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = E_2 \Rightarrow Q$ orthogonal.

(b) (e_1, e_2) ist eine ONB in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)}(f_1) = B_1$ ist orthogonal $\overset{(21.6)}{\Rightarrow}$ f_1 ist Isometrie.

(c) Es gilt: $T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{B}} = (T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = (T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)})^{-1} \cdot Q \cdot T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ nicht orthogonal, da Spalten keine ONB in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bilden.
Da $\mathcal{B}$ keine ONB in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ war, konnten wir nicht erwarten, dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ orthogonal ist (die Charakterisierung in (21.6) gilt nur für ONB $\mathcal{B}$).

(d) Es gilt $\|e_1\|_A^2 = e_1^t A e_1 = 1$, aber $\|f_1(e_1)\|_A^2 = \|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t\|_A^2 = \frac{1}{2}(1,1)A(1,1)^t = \frac{5}{2}$, d.h. $\|e_1\|_A^2 \neq \|f_1(e_1)\|_A^2$.
$\Rightarrow f_1$ ist keine Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$.
(Alternativ (aufwendig): Bestimme ONB $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ und prüfe, ob $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ orthogonal ist.)

(e) Bestimme ONB aus (e_1, e_2) in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ mit Gram-Schmidt:
$\tilde{w}_1 = e_1$, $w_1 = \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|_A} = (1,0)^t$.
$\tilde{w}_2 = e_2 - \langle e_2, w_1\rangle_A w_1 = e_2 - e_1 = (-1,1)^t$,
$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|_A} = (-1,1)^t$.
$\Rightarrow \mathcal{C} = (w_1, w_2)$ ist ONB von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$.
$\Rightarrow T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $(T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
$\Rightarrow$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_2) = \underbrace{T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{B}}}_{=(T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)}(f_2)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)}}_{=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Es gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_2)^t \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_2) = E_2 \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_2)$ ist orthogonal $\overset{\mathcal{B}\text{ ONB in }(\mathbb{R}^2,\langle\cdot,\cdot\rangle_A}{\Rightarrow}$ f_2 ist Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A$.

(f) Wir wählen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ als orthogonale Matrix. Wir dürfen nicht $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = E_2$ oder $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ wählen, sonst erhalten wir $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ bzw. f_2.

Wähle zum Beispiel $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} M_{(e_1,e_2)}^{(e_1,e_2)}(f) &= T_{(e_1,e_2)}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot (T_{(e_1,e_2)}^{\mathcal{B}})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =: T, \end{aligned}$$

d.h. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(v) = Tv$ ist eine Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$.

Aufgabe P28 (Charakterisierungen von Isometrien).
Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdimensionale Euklidische Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W)$ und $\varphi : V \to W$ linear.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) φ ist eine Isometrie.

(ii) $\forall v \in V : \|v\|_V = 1 \Rightarrow \|\phi(v)\|_W = 1$.

(iii) Ist $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V, so ist $(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ eine ONB von W.

(iv) Es gibt eine ONB $(v_1, ..., v_n)$ von V, so dass $(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ eine ONB von W ist.

(b) Sei nun $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $|\det(\varphi)| = 1$. Es gelte weiter

$$\forall v, w \in V : \quad v \perp w \quad \Rightarrow \quad \varphi(v) \perp \varphi(w).$$

Zeigen Sie: φ ist eine Isometrie.
Hinweis: Verwenden Sie (a).

Lösung: (a) Wir zeigen $(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii)$ (viele Variationen sind möglich).

- „(ii)⇒(i)“: Sei $v \in V$ beliebig. $\Rightarrow u := \frac{v}{\|v\|_V}$ erfüllt $\|u\|_V = \frac{\|v\|_V}{\|v\|_V} = 1$.
$\Rightarrow \|\varphi(v)\|_W = \|\varphi(\|v\|_V u)\|_W \overset{\varphi \text{ linear}, \|\cdot\|_W \text{ homogen}}{=} \|v\|_V \cdot \|\varphi(u)\|_W \overset{\text{(ii)}}{=} \|v\|_V = \|v\|_V \cdot \|u\|_V \overset{\|\cdot\|_V \text{ homogen}}{=} \|\|v\|_V \cdot u\|_V = \|v\|_V$.
- „(ii) ⇒ (iii)“: Sei $(v_1, ..., v_n)$ ONB von V.
Wir zeigen, dass $(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ ONB von W ist. Für $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$ gilt:
$$\|\varphi(v_i)\|_W \overset{(i)}{=} \|v_i\|_V \overset{(v_1,...,v_n) \text{ ONB}}{=} 1,$$
und
$$\langle\varphi(v_i), \varphi(v_j)\rangle_W \overset{(i)}{=} \langle v_i, v_j\rangle_V \overset{(v_1,...,v_n) \text{ ONB}}{=} 0.$$
$\Rightarrow (\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ ist orthonormal in W
$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow} (\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ linear unabhängig.
$\overset{\dim_{\mathbb{R}}(V)=\dim_{\mathbb{R}}(W)}{\Rightarrow} (\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ Basis von W
$\Rightarrow (\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ ist ONB von W.
- „(iii) ⇒ (iv)“: Es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty \overset{\text{Vorlesung}}{\Rightarrow} V$ hat eine ONB $(v_1, ..., v_n)$
$\overset{(iii)}{\Rightarrow} (\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ ist ONB von W.

- „(iv) $\Rightarrow$ (ii)“: (iv) $\Rightarrow$ Es gibt ONB $(v_1, ..., v_n)$ von V, so dass $(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ ONB von W.
  Sei $v \in V$ beliebig mit $\|v\|_V = 1$.
  $(v_1, ..., v_n)$ ONB $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$: $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.
  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 1 &= \|v\|_V = \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \Big\|_V = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \rangle_V \\ &\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ bilinear}}{=} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle_V \overset{(v_1, ...v_n) \text{ ONB}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \end{aligned}$$

  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|\varphi(v)\|_W &\overset{\varphi \text{ linear}}{=} \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) \Big\|_W \\ &= \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i), \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) \rangle_W \\ &\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ bilinear}}{=} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \langle \varphi(v_i), \varphi(v_j) \rangle_W \\ &\overset{(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n)) \text{ ONB von } W}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1. \end{aligned}$$

(b) Es sei $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V.
$\det(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \varphi$ bijektiv $\Rightarrow \varphi(v_i) \neq 0$, $i = 1, ..., n$.
Definiere $\lambda_i := \|\varphi(v_i)\|$ $(i = 1, ..., n)$. Seien $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$. $\Rightarrow \langle v_i + v_j, v_i - v_j \rangle = \|v_i\|^2 - \|v_j\|^2 = 1 - 1 = 0$.
$\Rightarrow v_i \perp v_j$.
Voraussetzung $\Rightarrow 0 = \langle \varphi(v_i + v_j), \varphi(v_i - v_j) \rangle \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \|\varphi(v_i)\|^2 - \|\varphi(v_j)\|^2 = \lambda_i^2 - \lambda_j^2$
$\overset{\lambda_i, \lambda_j \geq 0}{\Rightarrow} \lambda_i = \lambda_j$.
Setze $\lambda := \lambda_1$, $G := \frac{1}{\lambda}\varphi$.
Wir zeigen: G ist Isometrie.
Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$. Es ist

$$\|G(v_i)\| = \frac{1}{\lambda}\|\varphi(v_i)\| = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda = 1,$$

und

$$\langle G(v_i), G(v_j) \rangle = \frac{1}{\lambda^2} \langle \varphi(v_i), \varphi(v_j) \rangle \overset{\text{Vorauss., } v_i \perp v_j}{=} 0.$$

P28(a) $\Rightarrow$ G Isometrie.
$\varphi = \lambda \cdot G \Rightarrow 1 \overset{\text{Vorauss.}}{=} |\det(\varphi)| = |\lambda|^{\dim(V)} \cdot |\det(G)| \overset{G \text{ Isom.}}{=} |\lambda|^{\dim(V)}$
$\Rightarrow |\lambda| = 1$.
$\Rightarrow \varphi \in \{-G, G\} \Rightarrow \varphi$ Isometrie.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`