UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

7. Präsenzblatt

Aufgabe P25 (Orthogonale Komplemente in ∞-dimensionalen Euklidischen Räumen).

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein Euklidischer Raum (nicht notwendig endlichdimensional) und $U, W \subseteq$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) $V^\perp = \{0\}$ und $\{0\}^\perp = V$,

(b) $U \subseteq W \implies W^\perp \subseteq U^\perp$,

(c) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, und $U^\perp = ((U^\perp)^\perp)^\perp$. *Bemerkung: Im Gegensatz zu endlichdimensionalen Euklidischen Räumen gilt im Allgemeinen nicht $U = (U^\perp)^\perp$, vgl. (e).*

Der Untervektorraum $V := C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | \ f \text{ stetig}\} \subset \text{Abb}([0,1], \mathbb{R})$ der stetigen Abbildungen ist zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \langle p, q \rangle := \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$ ein ∞-dimensionaler Euklidischer Raum.
Gegeben sei der UVR $U := \{f \in V : f(0) = 0\} \subset V$. Zeigen Sie:

(d) $U^\perp = \{0\}$,

(e) $U \neq (U^\perp)^\perp$.

Aufgabe P26 (Orthogonale Komplemente in ∞-dimensionalen Euklidischen Vektorräumen).

Sei $V := C[-1,1] := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\} \subset \text{Abb}([-1,1], \mathbb{R})$ der Untervektorraum der stetigen Abbildungen. Zusammen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Gegeben seien weiter die folgenden UVR von V:

$$\begin{aligned} G &:= \{f \in V | \forall x \in [-1,1] : f(-x) = f(x)\}, \\ U &:= \{f \in V | \forall x \in [-1,1] : f(-x) = -f(x)\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $V = G \oplus U$.
Hinweis: Definieren Sie für $f \in V$ die Abbildung $g \in V$ durch $g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

(b) Zeigen Sie, dass $G^\perp = U$.
Bemerkung: Analog kann man zeigen, dass $U^\perp = G$.

(c) Folgern Sie, dass $V = G \oplus G^\perp$ und $(G^\perp)^\perp = G$ (d.h. in diesem Spezialfall gelten hier Gleichheiten, obwohl V unendlichdimensional ist).

Aufgabe P27 (Isometrien auf $\mathbb{R}^2$).

Es sei $\mathbb{R}^2$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und $f_i \in \text{End}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^2)$ $(i = 1,2)$, wobei $f_i = \tilde{B}_i$ mit

$$B_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ das durch A induzierte Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass B_1 orthogonal ist.

(b) Ist f_1 eine Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$?

(c) Sei eine Basis von $\mathbb{R}^2$ durch $\mathcal{B} = ((1,0)^t, (1,1)^t)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_1)$ nicht orthogonal ist. Wieso ist dies nicht der Fall?

(d) Ist f_1 eine Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$?

(e) Zeigen Sie, dass f_2 eine Isometrie in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ ist.

(f) Geben Sie eine weitere Isometrie $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ verschieden von der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ und f_2 an.

Aufgabe P28 (Charakterisierungen von Isometrien).
Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V), (W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ endlichdimensionale Euklidische Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W)$ und $\varphi : V \to W$ linear.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

  (i) φ ist eine Isometrie.
  (ii) $\forall v \in V : \|v\|_V = 1 \Rightarrow \|\phi(v)\|_W = 1$.
  (iii) Ist $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V, so ist $(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ eine ONB von W.
  (iv) Es gibt eine ONB $(v_1, ..., v_n)$ von V, so dass $(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ eine ONB von W ist.

(b) Sei nun $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $|\det(\varphi)| = 1$. Es gelte weiter

$$\forall v, w \in V : \quad v \perp w \quad \Rightarrow \quad \varphi(v) \perp \varphi(w).$$

Zeigen Sie: φ ist eine Isometrie.
Hinweis: Verwenden Sie (a).

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`