Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

6. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P21 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, orthogonale Komplemente und Projektionen, 6 = 1 + 2 + 2 + 1).

Sei $\mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$, und

$$U := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3, \qquad A := \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ das von A induzierte Skalarprodukt und $\langle.,.\rangle_{E_3}$ das Standardskalarprodukt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von U als Unterraum von $(\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle_{E_3})$.

Führen Sie die folgenden beiden Aufgaben jeweils einmal in $(\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle_{E_3})$ und einmal in $(\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle_A)$ durch.

(c) Berechnen Sie $p_U(e_3)$ und geben Sie den Abstand $\inf_{u\in U}\|e_3 - u\|$.
Hinweis: Eine ONB von U in $(\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle_A)$ ist gegeben durch

$$(w_1, w_2) := ((1,0,1)^t, 6^{-1/2}(2,1,0)^t).$$

(d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Lösung:

(a) Wir nutzen das Hauptminorenkriterium. Es ist
$\det(A^{(1)}) = \det(1) = 1 > 0$, $\det(A^{(2)}) = \det((\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix})) = 2 > 0$,
$\det(A) = \det(\left(\begin{smallmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&2\end{smallmatrix}\right)) \overset{\text{Sarrus}}{=} 4 - 2 = 2 > 0$.
Hauptminorenkriterium $\Rightarrow$ A positiv definit.

(b) Sei $v_1 = (1,0,1)^t, v_2 = (2,1,0)^t, v_3 = (0,1,-2)^t$.
Betrachte $\langle.,.\rangle := \langle.,.\rangle_{E_3}$. Wir wenden die Gram-Schmidt Orthogonalisierung an.

- $\tilde{w}_1 := v_1$, $\|\tilde{w}_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{2}$
  $\Longrightarrow\ w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$
- $\tilde{w}_2 := v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1$.
  Es ist

$$\begin{aligned}\langle v_2, w_1\rangle &= \left(\begin{smallmatrix}2&1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = \sqrt{2},\\ \tilde{w}_2 &= v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \|\tilde{w}_2\| = \sqrt{3}$

$\Longrightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\tilde{w}_3 := v_3 - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2$.
  Es ist

$$\begin{aligned} \langle v_3, w_1\rangle &= -\sqrt{2}, \\ \langle v_3, w_2\rangle &= \sqrt{3}, \\ \tilde{w}_3 &= v_3 - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

  d.h. $v_3 \in \mathrm{Lin}(w_1, w_2)$.

Damit bildet bereits $(w_1, w_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ eine ONB von U.

(c) (i) Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_{E_3}$. Es gilt $p_U(e_3) = \langle e_3, w_1\rangle w_1 + \langle e_3, w_2\rangle w_2$, und

$$\langle e_3, w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle e_3, w_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} p_U(e_3) &= \langle e_3, w_1\rangle w_1 + \langle e_3, w_2\rangle w_2 \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiterhin $\inf_{u\in U} \|e_3 - u\| = \|e_3 - p_U(e_3)\| = \frac{1}{6}\|\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\| = \frac{1}{6}\sqrt{30} = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

(ii) Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_A$.
Es gilt

$$\begin{aligned} \langle e_3, w_1\rangle &= e_3^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \\ \langle e_3, w_2\rangle &= e_3^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} p_U(e_3) &= \langle e_3, w_1\rangle w_1 + \langle e_3, w_2\rangle w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiterhin $\inf_{u\in U} \|e_3 - u\| = \|e_3 - p_U(e_3)\| = \frac{1}{3}\|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t\| = \frac{1}{3}\sqrt{15} = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

(d) (i) Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_{E_4}$. (w_1, w_2, e_3) bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Gram-Schmidt Orthogonalisiering: Mit $\tilde{w}_3 := e_3 - p_U(e_3) = \frac{1}{6}(-1, 2, 1)^t$ ist $(w_1, w_2, \tilde{w}_3)$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, und (w_1, w_2) ist eine Orthogonalbasis von U. $\Longrightarrow U^\perp = \mathrm{Lin}(\tilde{w}_3)$. ONB von $U^\perp$ ist gegeben durch $w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)^t$.

(ii) Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_A$. (w_1, w_2, e_3) bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Gram-Schmidt Orthogonalisiering: Mit $\tilde{w}_3 := e_3 - p_U(e_3) = \frac{1}{3}(-1, 1, 0)^t$ ist $(w_1, w_2, \tilde{w}_3)$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, und (w_1, w_2) ist eine Orthogonalbasis von U. $\Longrightarrow U^\perp = \mathrm{Lin}(\tilde{w}_3)$. ONB von $U^\perp$ ist gegeben durch $w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0)^t$.

Aufgabe P22 (Orthonormalisierung auf abstrakten Vektorräumen).
Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $V := M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(A, B) := \mathrm{Spur}(A^t B)$. Sei

$$W := \mathrm{Lin}(v_1, v_2) := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}).$$

(i) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine Orthonomalbasis von W.

(ii) Sei $v := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion $p_W(v)$.

(b) Sei $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Gegeben sei die Bilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(p, q) := \int_0^1 p(t)q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$. Sei $W := \mathrm{Lin}(t - 1, t^2)$.

(i) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt-Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von W.
Hinweis: Es gilt $\int_0^\infty (x^2 - 4x + 4)^2 e^{-x}\mathrm{d}x = 8$ *und* $\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x = k!$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Berechnen Sie $p_W(1)$ und geben Sie $W^\perp$ an.

Lösung:

(a) Es bezeichne $\| \cdot \| := \sqrt{\gamma(\cdot, \cdot)}$. Wir verwenden Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren:

(i)
- $\tilde{w}_1 := v_1$,
- $\|\tilde{w}_1\|^2 = \|v_1\|^2 = \mathrm{Spur}(v_1^t v_1) = \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Big) = \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Big) = 4$.
  $\Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $\tilde{w}_2 := v_2 - \gamma(w_1, v_2)w_1$.
  Hier ist

  $$\gamma(w_1, v_2) = \mathrm{Spur}(w_1^t v_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Big) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Big) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

  $$\Rightarrow \tilde{w}_2 = v_2 - \gamma(w_1, v_2)w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- $\|\tilde{w}_2\|^2 = \mathrm{Spur}(\tilde{w}_2^t \tilde{w}_2) = \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big) = \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Big) = 2$.
  $\Rightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also ist eine ONB von W gegeben durch (w_1, w_2) mit

$$w_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Es gilt

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{2} \gamma(w_i, v)w_i.$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
\gamma(w_1, v) &= \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Big) = \frac{1}{2},\\
\gamma(w_2, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$p_W(v) = \frac{1}{2}w_1 + 0 \cdot w_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) (i) Gram-Schmidt: Es sei $\|\cdot\| := \sqrt{\gamma(\cdot,\cdot)}$.

- $\tilde{w}_1 = t - 1$,
  $\|\tilde{w}_1\|^2 = \int_0^\infty \underbrace{(x-1)^2}_{=x^2-2x+1} e^{-x}dx = 2 - 2 + 1 = 1$,
  $\Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = t - 1.$
- Es ist

$$\gamma(w_1, t^2) = \int_0^\infty \underbrace{(x-1)x^2}_{=x^3-x^2} e^{-x}dx = 6 - 2 = 4.$$

  $\Rightarrow \tilde{w}_2 := t^2 - \gamma(w_1, t^2)w_1 = t^2 - 4(t-1) = t^2 - 4t + 4.$
  $\|\tilde{w}_2\|^2 = \int_0^\infty (x^2 - 4x + 4)^2 e^{-x}dx \overset{\text{Hinweis}}{=} 8.$
  $\Rightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{8}}(t^2 - 4t + 4).$

(ii) Berechnung der Projektion: Es gilt

$$\begin{aligned}
\gamma(w_1, 1) &= \int_0^\infty (x-1)e^{-x}dx = 1 - 1 = 0,\\
\gamma(w_2, 1) &= \frac{1}{\sqrt{8}}\int_0^\infty (x^2 - 4x + 4)e^{-x}dx = \frac{1}{\sqrt{8}}(2 - 4 + 4) = \frac{2}{\sqrt{8}}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$p_W(1) = \gamma(w_1, 1)\cdot w_1 + \gamma(w_2, 1)\cdot w_2 = \frac{1}{4}(t^2 - 4t + 4).$$

Gram-Schmidt $\Rightarrow$ (w_1, w_2, w_3) mit $w_3 := t^3 - p_W(1) = t^3 - \frac{1}{4}(t^2 - 4t + 4)$ ist ONB von V, und (w_1, w_2) ist ONB von W.
$\Rightarrow W^\perp = \mathrm{Lin}(w_3)$.

Aufgabe P23 (Cholesky-Zerlegung und QR-Zerlegung).
Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A mit Hilfe des Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahrens.

(b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von B. Wie kann die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ von $Bx = e_3$ nun berechnet werden?

Lösung:

(a) Mit Gram-Schmidt: Sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\gamma(v,w) := v^t A w$ sowie $\|v\| := \sqrt{\gamma(v,v)}$ die induzierte Norm.

- $\tilde{w}_1 := e_1$,
  $\Rightarrow \|\tilde{w}_1\|^2 = \gamma(\tilde{w}_1, \tilde{w}_1) = e_1^t A e_1 = 1$
  $\Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = e_1$.
- $\gamma(w_1, e_2) = e_1^t A e_2 = 1$.
  $$\Rightarrow \tilde{w}_2 := e_2 - \gamma(w_1, e_2) w_1 = e_2 - e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
  $$\|\tilde{w}_2\|^2 = \tilde{w}_2^t A \tilde{w}_2 = (-1,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$
  $$\Rightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- Es gilt
  $$\begin{aligned} \gamma(w_1, e_3) &= e_1^t A e_3 = 0, \\ \gamma(w_2, e_3) &= (-1,1,0) A e_3 = (-2,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1, \end{aligned}$$
  $$\Rightarrow \tilde{w}_3 = e_3 - \gamma(w_1, e_3) w_1 - \gamma(w_2, e_3) w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
  $$\|\tilde{w}_3\|^2 = \tilde{w}_3^t A \tilde{w}_3 = (1,-1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4,$$
  $$\Rightarrow w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definiere
$$G := (w_1, w_2, w_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cholesky-Zerlegung Vorlesung $\Rightarrow A = G^t G$.

(b) Es sei
$$A := B^t B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mit Gram-Schmidt: Sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\gamma(v,w) := v^t A w$ sowie $\|v\| := \sqrt{\gamma(v,v)}$ die induzierte Norm.

- $\tilde{w}_1 := e_1$,
  $\Rightarrow \|\tilde{w}_1\|^2 = \gamma(\tilde{w}_1, \tilde{w}_1) = e_1^t A e_1 = 2$
  $\Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$.

- $\gamma(w_1, e_2) = e_1^t A e_2 = \sqrt{2}$.

  $\Rightarrow \tilde{w}_2 := e_2 - \gamma(w_1, e_2) w_1 = e_2 - e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  $\|\tilde{w}_2\|^2 = \tilde{w}_2^t A \tilde{w}_2 = (-1, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

  $\Rightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma(w_1, e_3) &= e_1^t A e_3 = -\sqrt{2}, \\ \gamma(w_2, e_3) &= (-1, 1, 0) A e_3 = (-1, 1, 0) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1, \end{aligned}$$

  $\Rightarrow \tilde{w}_3 = e_3 - \gamma(w_1, e_3) w_1 - \gamma(w_2, e_3) w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  $\|\tilde{w}_3\|^2 = \tilde{w}_3^t A \tilde{w}_3 = (2, -1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2,$

  $\Rightarrow w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Definiere

$$R := (w_1, w_2, w_3)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Cholesky-Zerlegung Vorlesung $\Rightarrow A = R^t R$, und

$$Q := B \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

QR-Zerlegung Vorlesung $\Rightarrow B = QR$, und Q ist orthogonal, R obere Dreiecksmatrix.

Berechnung der Lösung von $Bx = e_1$:
(Natürlich kann einfach $x = B^{-1}e_1$ berechnet werden bzw. Gaußsches Eliminationsverfahren verwendet werden. Wir wollen aber nutzen, dass wir bereits die QR-Zerlegung berechnet haben).

Es gilt $Bx = e_3 \Longleftrightarrow QRx = e_3 \overset{Q \text{ orth., d.h. } Q^tQ = E_3}{\Longleftrightarrow}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} x = Rx = Q^t e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schrittweises Auflösen (3. Zeile von R, 2. Zeile von R, 1. Zeile von R) des LGS mit $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ liefert: $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = -1$, d.h. $x = (-1, 1, 0)^t$ ist die einzige Lösung.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`