UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

6. Präsenzblatt

Aufgabe P21 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, orthogonale Komplemente und Projektionen, 6 = 1 + 2 + 2 + 1).

Sei $\mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$, und

$$U := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3, \qquad A := \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 0\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ das von A induzierte Skalarprodukt und $\langle.,.\rangle_{E_3}$ das Standardskalarprodukt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von U als Unterraum von $(\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle_{E_3})$.

Führen Sie die folgenden beiden Aufgaben jeweils einmal in $(\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle_{E_3})$ und einmal in $(\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle_A)$ durch.

(c) Berechnen Sie $p_U(e_3)$ und geben Sie den Abstand $\inf_{u\in U}\|e_3 - u\|$.
Hinweis: Eine ONB von U in $(\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle_A)$ ist gegeben durch

$$(w_1, w_2) := ((1,0,1)^t, 6^{-1/2}(2,1,0)^t).$$

(d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Aufgabe P22 (Orthonormalisierung auf abstrakten Vektorräumen).

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $V := M(2\times 2, \mathbb{R})$ und $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(A,B) := \mathrm{Spur}(A^tB)$. Sei

$$W := \mathrm{Lin}(v_1, v_2) := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}).$$

(i) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine Orthonomalbasis von W.

(ii) Sei $v := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \in V$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion $p_W(v)$.

(b) Sei $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Gegeben sei die Bilinearform $\gamma : V\times V \to \mathbb{R}, \gamma(p,q) := \int_0^1 p(t)q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$. Sei $W := \mathrm{Lin}(t-1, t^2)$.

(i) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt-Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von W.
Hinweis: Es gilt $\int_0^\infty (x^2-4x+4)^2 e^{-x}\mathrm{d}x = 8$ und $\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x = k!$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Berechnen Sie $p_W(1)$ und geben Sie $W^\perp$ an.

Aufgabe P23 (Cholesky-Zerlegung und QR-Zerlegung).
Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A mit Hilfe des Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahrens.

(b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von B. Wie kann die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ von $Bx = e_3$ nun berechnet werden?

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`