5. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P17 (Berechnung von Projektionen).
Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein Euklidischer Raum und $p : V \to V$ eine orthogonale Projektion.

(a) Zeigen Sie: Für alle $v \in V$ gilt die Abschätzung $\|p(v)\| \leq \|v\|$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz des Pythagoras.

Wir betrachten nun $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Gegeben seien Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $p_i := \tilde{A}_i$ $(i = 1, 2)$.

(b) Weisen Sie nach, dass p_i, $i = 1, 2$, Projektionen auf denselben Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^3$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass p_2 eine orthogonale Projektion ist und p_1 nicht.

(d) Zeigen Sie anhand von p_1, dass die Aussage in (a) nicht für beliebige Projektionen gilt.

(e) Berechnen Sie $\inf_{u \in U} \|e_1 - u\|$.

Lösung:

(a) Es gilt $\|v\|^2 = \|v - p(v) + p(v)\|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \|v - p(v)\|^2 + \|p(v)\|^2 \geq \|p(v)\|^2$.

(b) Offenbar gilt $A_i^2 = A_i$, $i = 1, 2 \implies p_i$ Projektion, $i = 1, 2$.
Wir bestimmen eine Basis von $\text{Bild}(A_i) = \text{Lin}(A_i e_1, A_i e_2, A_i e_3)$, $i = 1, 2$. Elementare Zeileumformungen ergeben

- für $\text{Bild}(A_1)$:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\implies \text{Bild}(A_1) = \text{Lin}((1, 0, -1)^t, (0, 1, 1)^t)$.
- für $\text{Bild}(A_2)$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\implies \text{Bild}(A_2) = \text{Lin}((1, 0, -1)^t, (0, 1, 1)^t) = \text{Bild}(A_1)$.

(c) Definiere $X = ((1,0,-1)^t, (0,1,1)^t) \in M(3 \times 2)$.
Nach Satz (20.5) ist die orthogonale Projektion $p_U : V \to V$ auf U gegeben durch $p_U(v) = \Pi_U \cdot v$, wobei

$$\Pi_U = X(X^tX)^{-1}X^t = X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} X^t = \frac{1}{3} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A_2.$$

$\Rightarrow p_2$ hat gleiche Darstellungsmatrix wie p_U.
Orthogonale Projektion eindeutig bestimmt $\Rightarrow p_2 = p_U$.
$A_1 \neq A_2$, orthogonale Projektion eindeutig bestimmt $\implies$ p_1 ist keine orthogonale Projektion.
Alternativ: Zeige Kern(p_2) $\perp$ Bild(p_2) $= U$ (vgl. ...). Seien dazu $u_1 = (1,0,-1)^t$, $u_2 = (0,1,1)^t$ die oben bestimmten Basisvektoren von U.

- *Es gilt Kern(p_2) = Lin(v) mit $v := (1,-1,1)^t$. Außerdem $\langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow$ Kern(p_2) $\perp$ Bild(p_2).*
- *$v = (1,0,0)^t$ erfüllt $p_1(v) - v = (2,-1,3)^t - (1,0,0)^t = (1,-1,3)^t$. Es gilt*

$$\langle p_1(v) - v, u_1 \rangle = \langle (1,-1,3)^t, (1,0,-1)^t \rangle = -2 \neq 0,$$

d.h. $p_1(v) - v \not\perp U$.

(d) Wähle $v = (1,0,0)^t$. Dann gilt: $\|p_1(v)\| = \|(2,-1,-3)\| = \sqrt{14} > 3 > 1 = \|v\|$.
Bemerkung: Es gilt $\|p_2(v)\| = \sqrt{2/3} \leq 1 = \|v\|$.

(e) Es ist $\inf_{u \in U} \|e_1 - u\| = \|e_1 - p_U(e_1)\|$. Hier ist

$$p_U(e_1) = p_2(e_1) = A_2 e_1 = \frac{1}{3}(2,1,-1)^t,$$

d.h.

$$\inf_{u \in U} \|e_1 - u\| = \|(1,0,0)^t - \frac{1}{3}(2,1,-1)^t\| = \frac{1}{3}\|(1,-1,1)^t\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe P18 (Funktionsapproximation durch Polynome).
Wir betrachten den Vektorraum $V = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} | \, f \text{ stetig}\} \subset \mathrm{Abb}([-1,1], \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \gamma(p,q) := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Menge $U := \{f \in V | f \text{ ist Polynom vom Grad} \leq 2\}$ ist ein Untervektorraum von V. Sei $p_i \in U$ gegeben durch $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$. Dann ist $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von U.
Sei nun $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2$.

(a) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion $p_U(f)$ mit Hilfe von Satz (20.5).

(b) Eine Orthonormalbasis von U bzgl. γ ist gegeben durch

$$\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2), \quad q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad q_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

Berechnen Sie nun $p_U(f)$ mit Hilfe von Bemerkung (20.8).

(c) Skizzieren Sie f und $p_U(f)$ in einem Graphen.

Lösung:

Es ist $f = f_1 + f_2$ mit $f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = -x^2$.
$f_2 \in U \Rightarrow p_U(f) = p_U(f_1) + f_2$. Es muss also stets nur $p_U(f_1)$ bestimmt werden.

(a) Es gilt

$$M^*_{\mathcal{B}}(\gamma) = (\gamma(p_i, p_j))_{i,j=0,1,2} = (\int_{-1}^{1} t^{i+j}\mathrm{d}t)_{i,j=0,1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Bestimme Inverses von $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$:

$$(M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)|E_3) \overset{\substack{\frac{1}{2}Z3\to Z3 \\ \frac{3}{2}Z2\to Z2 \\ \frac{1}{2}Z1\to Z1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{3}Z1+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{45} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\frac{45}{4}Z3\to Z3 \\ -\frac{1}{3}Z3+Z1\to Z1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & 0 & -\frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{8} & 0 & \frac{45}{8} \end{array}\right) = (E_3|M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)^{-1}).$$

Es gilt

$$(\gamma(p_i, f_1))_{i=0,1,2} = \left(\int_{-1}^{1} x^{3+i}\mathrm{d}x\right)_{i=0,1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt mit Satz (20.5):

$$\begin{aligned} p_U(f_1) &= (p_0, p_1, p_2) \cdot M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \gamma(p_0, f_1) \\ \gamma(p_1, f_1) \\ \gamma(p_2, f_1) \end{pmatrix} \\ &= (p_0, p_1, p_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & -\frac{15}{8} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{15}{8} & 0 & \frac{45}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (p_0, p_1, p_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} p_1. \end{aligned}$$

Daher ist $p_U(f) = p_U(f_1) + f_2 = \frac{3}{5}p_1 - p_2$, d.h. $(p_U(f))(x) = \frac{3}{5}x - x^2$.

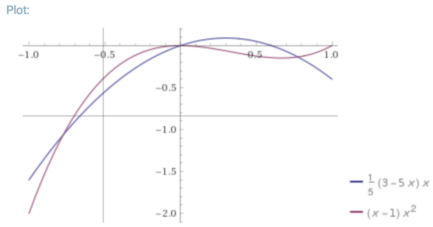
(b) Bemerkung (20.8), $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$ ONB $\Rightarrow$

$$p_U(f_1) = \sum_{i=0}^{2} \gamma(q_i, f_1) \cdot q_i.$$

Hier ist (beachte: Integral ist Null, wenn Integrand ungerade Funktion, da Grenzen symmetrisch um 0):

$$\begin{aligned}
\gamma(q_0, f_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x = 0, \\
\gamma(q_1, f_1) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5}, \\
\gamma(q_2, f_1) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1) x^3 \mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt $p_U(f_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5} \cdot q_1 = \frac{3}{5} p_1$.
s.o. $\Rightarrow$ $(p_U(f))(x) = \frac{3}{5}x - x^2$.

(c)


Aufgabe P19 (Ausgleichsrechnung).
In dieser Aufgabe fassen wir $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ als Standardvektorräume über $\mathbb{R}$ auf mit entsprechenden Standardskalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Normen $\| \cdot \|$. Sei $X \in M(n \times m, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das *Ausgleichsproblem*

$$\inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\| \quad (*).$$

$\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ heißt Lösung von $(*)$, falls $\|y - X\hat{\beta}\| = \inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\|$.

(a) Es sei zunächst $\mathrm{Rang}(X) = m$. Zeigen Sie, dass $(*)$ eine eindeutige Lösung $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ besitzt, und geben Sie eine explizite Formel für $\hat{\beta}$ an.
Hinweis: Nutzen Sie P19(b).

Es sei nun $X \in M(n \times m, \mathbb{R})$ beliebig. Zeigen Sie:

(b) Es gilt:
$$\tilde{\beta} \text{ ist Lösung von } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\beta} \in \hat{\beta} + \mathrm{Kern}(X).$$
Bemerkung: Insbesondere ist die Lösung von $(*)$ eindeutig bestimmt, falls Rang$(X) = m$.

(c) Für $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ gilt
$$\hat{\beta} \text{ ist Lösung von } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad X^t X \hat{\beta} = X^t y,$$
d. h. $\hat{\beta}$ löst $(*)$ genau dann, wenn es die *Normalengleichung* (rechte Seite) erfüllt.

Ein Zustelldienst erhebt folgende Daten ($n = 5$) zwischen der Anzahl der gelieferten Päckchen (x_1 Anzahl), der Entfernung (x_2 Umkreis in 100 km) zum Kunden und der Zeit (y in Stunden), die aufgebracht wird:

x_{i1}	1	3	2	1	1
x_{i2}	3	1	2	0	2
y_i	3	2	3	0	2

Der Anbieter geht davon aus, dass folgender Zusammenhang besteht:

$$y_i \approx a + b \cdot x_{i1} + c \cdot x_{i2}, \quad i = 1, ..., n,$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ Parameter sind. Schätzungen für die Parameter werden ermittelt durch Minimierung der Abweichungen

$$\inf_{(a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{n} |y_i - (a + bx_{i1} + cx_{i2})|^2 \quad (*).$$

(d) Zeigen Sie, dass sich $(*)$ mit $\beta = (a, b, c)^t$ in der Form $\inf_{\beta \in \mathbb{R}^3} \|y - X\beta\|$ darstellen lässt.

(e) Bestimmen Sie für den Dienstleister eine Lösung $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \in \mathbb{R}^3$ des Minimierungsproblems $(*)$.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Rechnung $(X^tX)^{-1} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 72 & -24 & -16 \\ -24 & 15 & 2 \\ -16 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Sei $U := \text{Bild}(X)$. Es gilt

$$\inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\| = \inf_{u \in U} \|y - u\|.$$

P19(b) $\Rightarrow$ Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung $\hat{u} = p_U(y) \in U$ des Optimierungsproblems $(*)$.

$\hat{u} \in U \Rightarrow$ Es gibt $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ mit $\hat{u} = X\hat{\beta}$.

$\Rightarrow \inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\| = \|y - X\hat{\beta}\|$, d.h $\hat{\beta}$ ist Lösung von $(*)$.

Form von $\hat{\beta}$: Vorlesung, Spalten von X bilden Basis von $U \Rightarrow X\hat{\beta} = \hat{u} = p_U(y) = X(X^tX)^{-1}X^ty$.

$\text{Rang}(X) = m \Rightarrow \tilde{X}$ injektiv $\Rightarrow \hat{\beta} = (X^tX)^{-1}X^ty$.

$\Rightarrow \hat{\beta}$ ist eindeutig bestimmt.

(b) Sei $\hat{u} = p_U(y) = X\hat{\beta}$ aus (a).
„$\Rightarrow$“: Sei $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung von $(*)$. Dann gilt: $\tilde{u} := X\tilde{\beta}$ erfüllt

$$\inf_{u \in \text{Bild}(X)} \|y - u\| = \|y - \tilde{u}\|.$$

A17(b) $\Rightarrow \tilde{u} = p_U(y) = \hat{u}$
$\Leftrightarrow X\tilde{\beta} = X\hat{\beta}$.
$\Leftrightarrow X(\tilde{\beta} - \hat{\beta}) = 0$
$\Leftrightarrow \tilde{\beta} - \hat{\beta} \in \text{Kern}(X)$
$\Leftrightarrow \tilde{\beta} \in \hat{\beta} + \text{Kern}(X)$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\tilde{\beta} \in \hat{\beta} + \text{Kern}(X)$ und $\tilde{u} := X\tilde{\beta}$.
$\overset{s.o.}{\Rightarrow}$ Es gilt $\tilde{u} = p_U(y) = \hat{u}$.
A17(b) $\Rightarrow \inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\| = \inf_{u \in \text{Bild}(X)} \|y - u\| = \|y - \tilde{u}\| = \|y - X\tilde{\beta}\|$, d.h. auch $\tilde{\beta}$ ist Lösung von $(*)$.

(c) „$\Rightarrow$“: Sei $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ Lösung von (*). $\Rightarrow \hat{u} = X\hat{\beta}$ ist Lösung von $\inf_{u \in U} \|y - u\|$.
A17(b) $\Rightarrow \hat{u} = p_U(y)$.
Eigenschaft $p_U \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\forall u \in U: \quad \langle y - \hat{u}, u \rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad &\forall \beta \in \mathbb{R}^m: \quad 0 = \langle y - X\hat{\beta}, X\beta \rangle = \langle X^t(y - X\hat{\beta}), \beta \rangle. \qquad (**) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir folgenden Zusammenhang zwischen dem Standardskalarprodukten auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ benutzt:

$$\langle v, X\beta\rangle = v^t(X\beta) = (X^t v)^t\beta = \langle X^t v, \beta\rangle.$$

$(**)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ nicht ausgeartet $\Rightarrow X^t(y - X\hat{\beta}) = 0$.
$\Rightarrow X^t X\beta = X^t y$.

„$\Leftarrow$“: Normalengleichung $\Rightarrow (**)$ und damit mit $\hat{u} := X\hat{\beta}$:

$$\forall u \in U: \quad \langle y - \hat{u}, u\rangle = 0.$$

A17(b) $\Rightarrow \inf_{u\in U} \|y - u\| = \|y - \hat{u}\| \Rightarrow$ Behauptung.

(d) Wir fassen die Beobachtungen $x_{i1}, x_{i2}, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, als Vektoren im $\mathbb{R}^n$ zusammen und erhalten die Darstellung:

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}}_{=:X\in M(n\times 3,\mathbb{R})} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{=:\beta\in\mathbb{R}^3} \quad \in \mathbb{R}^n$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b,c)^t\in\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_{i1} + cx_{i2}))^2 &\overset{\text{Def. Skalarprod.}}{=} \inf_{(a,b,c)^t\in\mathbb{R}^2} \langle y - X\beta, y - X\beta\rangle \\ &\overset{\text{Def. Norm}}{=} \inf_{(a,b,c)^t\in\mathbb{R}^3} \|y - X\beta\|^2 \end{aligned}$$

P18(a) $\overset{\text{Rang}(X)=3}{\Longrightarrow}$ Die eindeutige Lösung $\hat{\beta} := (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^t \in \mathbb{R}^3$ erfüllt $\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t y$.

(e) Berechnung ergibt:

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t y = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 & -16 & -8 & 48 & 16 \\ -5 & -17 & 6 & -11 & -7 \\ 10 & -2 & 4 & -14 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -24 \\ 23 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Aufgabe P20 (Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung).
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_i \in R$ $(i \in \{1, ..., n\})$. Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

(a) Es gilt $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.

(b) Ist $a_i > 0$ $(i \in \{1, ..., n\})$ und $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, so gilt $n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$.

(c) Ist $b_i > 0$ $(i \in \{1, ..., n\})$, so gilt $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n b_i a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}\right)$.

Lösung:

Sofern nicht anders bemerkt, verwenden wir die CSU auf $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, d.h.

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big)^2 = \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big).$$

(a) Es gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot a_i\right)^2 \overset{\text{Cauchy-Schwarz-Ungl.}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) = n\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

(b)

$$n = \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}\frac{1}{\sqrt{a_i}} \overset{\text{CSU}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{1/2}}_{=1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^{1/2} \implies n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

(c) Möglichkeit 1: $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n b_i x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist ein Skalarprodukt. Es folgt direkt die Aussage aus der CSU für $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n b_i a_i \cdot \frac{1}{b_i}\Big)^2 \overset{CSU}{\leq} \Big(\sum_{i=1}^n b_i a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^n b_i \frac{1}{b_i^2}\Big).$$

Möglichkeit 2: CSU liefert

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i} a_i \cdot \frac{1}{\sqrt{b_i}}\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n b_i a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}\Big).$$

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:

`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`