**Lineare Algebra 2**
**Prof. Dr. R. Dahlhaus**
**Dr. S. Richter, N. Phandoidaen**
**Sommersemester 2019**

## 5. Präsenzblatt

**Aufgabe P17 (Berechnung von Projektionen).**
Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein Euklidischer Raum und $p : V \to V$ eine orthogonale Projektion.

(a) Zeigen Sie: Für alle $v \in V$ gilt die Abschätzung $\|p(v)\| \leq \|v\|$.
*Hinweis: Verwenden Sie den Satz des Pythagoras.*

Wir betrachten nun $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Gegeben seien Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $p_i := \tilde{A}_i$ $(i = 1, 2)$.

(b) Weisen Sie nach, dass $p_i$, $i = 1, 2$, Projektionen auf denselben Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^3$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass $p_2$ eine orthogonale Projektion ist und $p_1$ nicht.

(d) Zeigen Sie anhand von $p_1$, dass die Aussage in (a) nicht für beliebige Projektionen gilt.

(e) Berechnen Sie $\inf_{u \in U} \|e_1 - u\|$.

**Aufgabe P18 (Funktionsapproximation durch Polynome).**
Wir betrachten den Vektorraum $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} |\, f \text{ stetig}\} \subset \mathrm{Abb}([-1, 1], \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \gamma(p, q) := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Menge $U := \{f \in V | f \text{ ist Polynom vom Grad} \leq 2\}$ ist ein Untervektorraum von $V$. Sei $p_i \in U$ gegeben durch $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$. Dann ist $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von $U$.
Sei nun $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2$.

(a) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion $p_U(f)$ mit Hilfe von Satz (20.5).

(b) Eine Orthonormalbasis von $U$ bzgl. $\gamma$ ist gegeben durch

$$\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2), \quad q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad q_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

Berechnen Sie nun $p_U(f)$ mit Hilfe von Bemerkung (20.8).

(c) Skizzieren Sie $f$ und $p_U(f)$ in einem Graphen.

**Aufgabe P19 (Ausgleichsrechnung).**

In dieser Aufgabe fassen wir $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ als Standardvektorräume über $\mathbb{R}$ auf mit entsprechenden Standardskalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Normen $\| \cdot \|$. Sei $X \in M(n \times m, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das *Ausgleichsproblem*

$$\inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\| \quad (*).$$

$\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ heißt Lösung von $(*)$, falls $\|y - X\hat{\beta}\| = \inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\|$.

(a) Es sei zunächst $\operatorname{Rang}(X) = m$. Zeigen Sie, dass $(*)$ eine eindeutige Lösung $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ besitzt, und geben Sie eine explizite Formel für $\hat{\beta}$ an.
*Hinweis: Nutzen Sie P19(b).*

Es sei nun $X \in M(n \times m, \mathbb{R})$ beliebig. Zeigen Sie:

(b) Es gilt:
$$\tilde{\beta} \text{ ist Lösung von } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\beta} \in \hat{\beta} + \operatorname{Kern}(X).$$
*Bemerkung: Insbesondere ist die Lösung von* $(*)$ *eindeutig bestimmt, falls Rang*$(X) = m$.

(c) Für $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ gilt
$$\hat{\beta} \text{ ist Lösung von } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad X^t X \hat{\beta} = X^t y,$$
d. h. $\hat{\beta}$ löst $(*)$ genau dann, wenn es die *Normalengleichung* (rechte Seite) erfüllt.

Ein Zustelldienst erhebt folgende Daten ($n = 5$) zwischen der Anzahl der gelieferten Päckchen ($x_1$ Anzahl), der Entfernung ($x_2$ Umkreis in 100 km) zum Kunden und der Zeit ($y$ in Stunden), die aufgebracht wird:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{i1}$ | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| $x_{i2}$ | 3 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| $y_i$ | 3 | 2 | 3 | 0 | 2 |

Der Anbieter geht davon aus, dass folgender Zusammenhang besteht:

$$y_i \approx a + b \cdot x_{i1} + c \cdot x_{i2}, \quad i = 1, ..., n,$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ Parameter sind. Schätzungen für die Parameter werden ermittelt durch Minimierung der Abweichungen

$$\inf_{(a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{n} |y_i - (a + bx_{i1} + cx_{i2})|^2 \quad (*).$$

(d) Zeigen Sie, dass sich $(*)$ mit $\beta = (a, b, c)^t$ in der Form $\inf_{\beta \in \mathbb{R}^3} \|y - X\beta\|$ darstellen lässt.

(e) Bestimmen Sie für den Dienstleister eine Lösung $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \in \mathbb{R}^3$ des Minimierungsproblems $(*)$.
*Hinweis: Verwenden Sie ohne Rechnung* $(X^t X)^{-1} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 72 & -24 & -16 \\ -24 & 15 & 2 \\ -16 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

**Aufgabe P20 (Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung).**

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_i \in R$ $(i \in \{1, ..., n\})$. Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

(a) Es gilt $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.

(b) Ist $a_i > 0$ $(i \in \{1, ..., n\})$ und $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, so gilt $n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$.

(c) Ist $b_i > 0$ ($i \in \{1, ..., n\}$), so gilt $\big(\sum_{i=1}^n a_i\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^n b_i a_i^2\big) \cdot \big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}\big)$.

---

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

**Homepage der Vorlesung:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`