UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

4. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P13 (Bestimmung von Signatur und Orthogonalbasen).
Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n, K)$ symmetrisch. Bei einer *simultanen Zeilen/Spalten-Umformung* wird nach einer Zeilenumformung von A die analoge Spaltenumformung an A ausgeführt (Beispiel: Wird die Umformung $\lambda \cdot \text{Zeile}_i + \text{Zeile}_j \to \text{Zeile}_j$ auf A angewandt, so direkt auch $\lambda \cdot \text{Spalte}_i + \text{Spalte}_j \to \text{Spalte}_j$).

- Ist $S_1 \in \text{GL}(n, K)$ die entsprechende Elementarmatrix der Zeilenumformung, so ist die entstehende Matrix gegeben durch $S_1 A S_1^t$.
- Man kann zeigen: Durch wiederholtes Anwenden simultaner Zeilen/Spalten-Umformungen $S_1, ..., S_n$ mit dem Ziel einer Zeilenstufenform wird erreicht, dass
$$(S_n \cdot ... \cdot S_1) A (S_n \cdot ... \cdot S_1)^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$
Diagonalgestalt besitzt mit $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$.
- Die Matrix $S := S_n \cdot ... \cdot S_1$ kann erhalten werden, indem **nur** die angewandten Zeilenumformungen parallel auf E_n angewandt werden.

(a) Zeigen Sie: Ist $S \in \text{GL}(n, K)$ eine Matrix, so dass SAS^t Diagonalgestalt besitzt, so bilden die Zeilen $v_1, ..., v_n$ von S eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ von (K^n, γ_A).

Wir betrachten nun den Spezialfall $K = \mathbb{R}$.

(b) Angenommen, durch simultante Zeilen/Spalten-Umformungen S wurde erreicht, dass
$$SAS^t = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$
Zeigen Sie, dass $\text{Signatur}(A) = (p, q)$ gilt.

Ist A zusätzlich positiv definit, so kann $(*)$ mit simultanen Zeilen/Spalten-Umformungen ausschließlich des Typs „Addiere Zeile u auf eine Zeile $j > i$“ erreicht werden, und außerdem
$$S \in U(n, \mathbb{R}) := \{S = (s_{ij}) \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) | \forall i, j \in \{1, ..., n\}, j > i : s_{ij} = 0, s_{ii} > 0\}.$$

Insbesondere gilt mit $L := S^{-1}$ die Darstellung $A = LL^t$, $L \in U(n, \mathbb{R})$. Diese Zerlegung wird auch als Cholesky-Zerlegung bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, dass die Cholesky-Zerlegung eindeutig ist, d.h. dass $L \in U(n, \mathbb{R})$ eindeutig bestimmt ist.
Bemerkung: Dann ist auch $S \in U(n, \mathbb{R})$ mit $(*)$ eindeutig bestimmt, und die Zeilen von S bilden eine (eindeutig bestimmte) Orthonormalbasis von (K^n, γ_A).

Lösung:

(a) S ist invertierbar $\Rightarrow \mathcal{B}$ ist eine Basis von K^n.
Sei $D := SAS^t$ (laut Voraussetzung Diagonalmatrix). Seien $i, j \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt

$$\gamma_A(v_i, v_j) = v_i^t A v_j = (SAS^t)_{ij} = D_{ij} = \begin{cases} D_{ii}, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

das heißt, $\mathcal{B}$ ist orthogonal bzgl. γ_A.

(b) Nach der Aussage nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz ist gilt mit $T := S^t$:

$$\text{Signatur}(A) = \text{Signatur}(T^t A T) = \text{Signatur}\left(\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}\right) = (p, q).$$

(c) Seien $L, R \in U(n, \mathbb{R})$ mit

$$A = LL^t = RR^t.$$

$\Rightarrow L^{-1}R(L^{-1}R)^t = E_n$. (**)
$\Rightarrow$

$$\underbrace{\underbrace{L^{-1}R}_{\in U(n,\mathbb{R}) \text{ da } U(n,\mathbb{R}) \text{ Gruppe}}}_{\text{untere Dreiecksmatrix}} = \underbrace{(\underbrace{(L^{-1}R)^{-1}}_{\in U(n,\mathbb{R}) \text{ da } U(n,\mathbb{R}) \text{ Gruppe}})^t}_{\text{obere Dreiecksmatrix}}$$

$\Rightarrow D := L^{-1}R$ ist Diagonalmatrix.
$\overset{(**)}{\Rightarrow} D^2 = DD^t = E_n$
$\Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n\} : D_{ii} \in \{\pm 1\}$
$D = L^{-1}R \in U(n, \mathbb{R}) \Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n\} : D_{ii} = 1$
$\Rightarrow D = E_n \overset{D = L^{-1}R}{\Rightarrow} L = R.$

Aufgabe P14 (Signatur, Orthogonalsysteme und positive Definitheit).
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und $(p, q) = \text{Signatur}(A)$.

(a) Zeigen Sie: A negativ semidefinit $\iff p = 0$.

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von P13 jeweils Signatur(A_i) und geben Sie eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \gamma_{A_i})$, $i = 1, 2, 3, 4$ an. Entscheiden Sie jeweils, ob A_i positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit ist.

Seien weitere Matrizen gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(c) Zeigen Sie: Ist A symmetrisch positiv definit, so ist A ist invertierbar und auch A^{-1} ist positiv definit.

(d) Weisen Sie nach, dass diese Matrizen positiv definit sind. Nutzen Sie dazu nacheinander die Kriterien Diagonaldominanz (P16), Hauptminoren (A16) bzw. die Signatur (A14).

(e) Geben Sie für A_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \gamma_{A_3})$ an.

Lösung:

(a) Sylvesterscher Trägheitssatz $\Rightarrow$ Es gibt $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $T^tAT = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$,

Signatur$(A) = (p, q)$.
„$\Rightarrow$“: Sei A negativ definit.
Angenommen, $p > 0$. $\Rightarrow$ Wähle $x = Te_1 \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. $\Rightarrow$ $x^tAx = (Te_1)^tA(Te_1) = e_1 \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} e_1 = 1 > 0$, Widerspruch zu A negativ semidefinit.
„$\Leftarrow$:“ Sei $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ beliebig. Sei $y = T^{-1}x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
$\Rightarrow x^tAx = y^t \begin{pmatrix} -E_q & \\ & 0 \end{pmatrix} y = -\sum_{j=1}^q y_j^2 \leq 0$
$\Rightarrow$ A negativ semidefinit.

(b) Wir führen jeweils simultane Zeilen/Spalten-Umformungen durch. Zusätzlich ermitteln wir auch die Matrix S (falls nur die Signatur bestimmt werden soll, ist die Bestimmung von S jedoch überflüssig; dann könnte unten jeweils die rechte Seite der Umformungen weggelassen werden).

- Es ist

$$(A_1|E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{3}Z1+Z2\to Z2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{\frac{1}{3}S1+S2\to S2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) =: (A_1'|S).$$

$\Rightarrow SA_1S^t = A_1'$.
$\Rightarrow$ Signatur$(A_1) =$ Signatur$(A_1') = (0, 2)$.
$\Rightarrow$ A_1 ist negativ definit.
Eine OB wird durch die Zeilen von S gebildet:

- Es ist

$$(A_2|E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-2)Z1+Z2\to Z2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{(-2)S1+S2\to S2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) =: (A_2'|S).$$

$\Rightarrow SA_2S^t = A_2'$.
$\Rightarrow$ Signatur$(A_2) =$ Signatur$(A_2') = (1, 1)$.
$\Rightarrow$ A_2 ist indefinit.

- Es ist

$$
\begin{aligned}
(A_3|E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-2)Z1+Z2\to Z2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)S1+S2\to S2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)Z1+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)S1+S3\to S3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) =: (A_3'|S).
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow SA_3S^t = A_3'$.
$\Rightarrow$ Signatur(A_3) = Signatur$(A_3') = (2, 0)$.
$\Rightarrow A_3$ ist positiv semidefinit (aber nicht positiv definit).

- Es ist

$$
\begin{aligned}
(A_4|E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{1}{2}Z2+Z1\to Z1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{1}{2}S2+S1\to S1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z1+Z2\to Z2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)S1+S2\to S2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-\frac{3}{2})Z1+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-\frac{3}{2})S1+S3\to S3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-\frac{1}{2})Z2+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-\frac{1}{2})S2+S3\to S3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) =: (A_4'|S)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow SA_4S^t = A_4'$.
$\Rightarrow$ Signatur(A_4) = Signatur$(A_4') = (1, 2)$.
$\Rightarrow A_4$ ist indefinit.

(c)

- Wir zeigen: A ist invertierbar.
  A invertierbar $\overset{A \in M(n\times n,\mathbb{R}) \text{ quadratisch}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$.
  Angenommen, $x \in \mathrm{Kern}(A)$, $x \neq 0$. Dann gilt

$$x^t A x = x^t \cdot 0 = 0,$$

  Widerspruch zu A positiv definit.

- Wir zeigen: A^{-1} ist positiv definit.
  Sei $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \overset{A \text{ invertierbar}}{\Rightarrow} y := A^{-1}x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
  $\Rightarrow$

$$x^t A^{-1} x = (Ay)^t A^{-1}(Ay) = y^t A y \overset{A \text{ positiv definit}}{>} 0.$$

(d)

- A_1:
  - Es gilt $2 > 1 = |-1| \Rightarrow A_1$ diagonaldominant $\overset{\text{P16}}{\Rightarrow} A_1$ positiv definit.
  - Es gilt $\det(A_1^{(1)}) = \det(2) = 2 > 0$,
    $\det(A_1) = 4 - 1 = 3 > 0$.
    $\overset{\text{A16}}{\Rightarrow} A_2$ positiv definit.
  - Es ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}Z1+Z2\to Z2}{\to} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}S1+S2\to S2}{\to} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} =: A_1'.$$

    $\Rightarrow \mathrm{Signatur}(A_1) = \mathrm{Signatur}(A_1') = (2, 0)$.
    $\Rightarrow A_1$ ist positiv definit.

- A_2:
  - Es gilt $2 > 1 = |1| + |0|$, $3 > 2 = |1| + |1| \Rightarrow A_2$ diagonaldominant $\overset{P16}{\Rightarrow} A_2$ positiv definit.
  - Es gilt $\det(A_2^{(1)}) = \det(2) = 2 > 0$,
    $\det(A_2^{(2)}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$,
    $\det(A_2) \overset{\text{Sarrus}}{=} 12 - 2 - 2 = 8 > 0$.
    $\overset{A16}{\Rightarrow} A_2$ positiv definit.
  - Es ist

$$\begin{aligned} A_2 \quad &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(-\frac{1}{2})Z1+Z2\to Z2}{\to} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\overset{-\frac{1}{2}S1+S2\to S2}{\to} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{-\frac{2}{5}Z2+Z3\to Z3}{\to} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \\ &\overset{-\frac{2}{5}S2+S3\to S3}{\to} > \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{pmatrix} =: A_2'. \end{aligned}$$

    $\Rightarrow \mathrm{Signatur}(A_2) = \mathrm{Signatur}(A_2') = (3, 0)$.
    $\Rightarrow A_2$ ist positiv definit.

- A_3:
  - A_3 ist nicht diagonaldominant (1. Zeile: $1 < 1 + 1$). Aus A16 kann hier also nicht positive Definit von A_3 erhalten werden.

- Es gilt $\det(A_3^{(1)}) = \det(1) = 1 > 0$,
  $\det(A_3^{(2)}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$,
  $\det(A_3) \overset{\text{Sarrus}}{=} 36 + 4 + 4 - 4 - 16 - 9 = 15 > 0$.
  $\overset{A16}{\Rightarrow} A_3$ positiv definit.
-

$$(A_3|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)Z1+Z2\to Z2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)S1+S2\to S2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)Z1+Z3\to Z3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)S1+S3\to S3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)Z2+Z3\to Z3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)S2+S3\to S3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) =: (A_3'|S).$$

  $\Rightarrow SA_3S^t = A_3'$.
  $\Rightarrow$ Signatur(A_3) = Signatur$(A_3') = (3, 0)$.
  $\Rightarrow A_3$ ist positiv definit.

(e) Aus der Berechnung von Signatur(A_3) in (b) lesen wir aus den Zeilen von S ab, dass $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$v_1 = (1, 0, 0)^t, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0)^t, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -1, 1)^t$$

eine ONB von $(\mathbb{R}^3, \gamma_{A_3})$ ist.

Aufgabe P15 (Bestimmung von Orthonormalbasen in Polynomenräumen).

Sei $V_k = \mathbb{R}[t]_{\leq k}$ mit Basis $\mathcal{B}_k = (1, t, ..., t^k)$ für $k = 2, 3$. Wir definieren die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ und betrachten folgende Skalarprodukte auf V_k $(k = 2, 3)$:

(i) $\beta : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}, \quad \beta(p, q) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)p(t)q(t)\mathrm{d}t$,

(ii) $\gamma : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}, \quad \gamma(p, q) := \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben.

(a) Bestimmen Sie $M^*_{\mathcal{B}_3}(\beta)$ und $M^*_{\mathcal{B}_2}(\gamma)$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & k \textit{ ungerade}, \\ (k-1)(k-3) \cdot ... \cdot 3 \cdot 1 & k \textit{ gerade}. \end{cases}$$

(b) Finden Sie jeweils eine untere Dreiecksmatrix $S \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ bzw. $T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, so dass $SM^*_{\mathcal{B}_3}(\beta)S^t = E_4$ bzw. $TM^*_{\mathcal{B}_2}(\gamma)T^t = E_3$.

(c) Nutzen Sie (b), um eine Orthonormalbasis von (V_3,β) und (V_2,γ) anzugeben.
Bemerkung: Die so ermittelten Polynome in (V_3,β) heißen (bis auf ein eventuell abweichendes Vorzeichen) Hermite-Polynome.

Lösung:

Wir betrachten β:

(a) Mit dem Hinweis gilt:

$$M^*_{\mathcal{B}_3}(\beta) = (\beta(t^i,t^j))_{0\le i,j\le 3} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)t^{i+j}\mathrm{d}t\right)_{0\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

(b) Simultane Zeilen/Spalten-Umformungen ergeben:

$$\begin{aligned}
(M^*_{\mathcal{B}_3}(\beta)|E_4) \quad &\overset{(-1)Z1+Z3\to Z3}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)S1+S3\to S3}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-3)Z2+Z4\to Z4}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-3)S2+S4\to S4}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) =: (M^*_{\mathcal{B}_3}(\beta)'|S').
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{array}{rclrcl} v_1 & := & (1,0,0,0)^t, & v_2 & := & (0,1,0,0)^t, \\ v_3 & := & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,0,1,0\right)^t, & v_4 & := & \frac{1}{\sqrt{6}}\left(0,-3,0,1\right)^t, \end{array}$$

womit $S = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ der gesuchten Matrix entspricht.

(c) Eine ONB von (V_3,β) ist nach (b) gegeben über:

$$(\Phi_{\mathcal{B}_3}(v_1),\Phi_{\mathcal{B}_3}(v_2),\Phi_{\mathcal{B}_3}(v_3),\Phi_{\mathcal{B}_3}(v_4)) = \left(1, t, \frac{1}{\sqrt{2}}(t^2-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(t^3-3t^2)\right).$$

Wir betrachten γ:

(a) Im Allgemeinen gilt $\int_0^1 t^k\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$. Daher erhalten wir:

$$M^*_{\mathcal{B}_2}(\gamma) = (\gamma(t^i,t^j))_{0\le i,j\le 2} = \left(\int_0^1 t^{i+j}\mathrm{d}t\right)_{0\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(b) Simultane Zeilen/Spalten-Umformungen ergeben:

$$(M^*_{\mathcal{B}_2}(\gamma)|E_3) \underset{(-1/2)S1+S2\to S2,(-1/3)S1+S3\to S3}{\overset{(-1/2)Z1+Z2\to Z2,(-1/3)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{(-1)S2+S3\to S3}{\overset{(-1)Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{array}\right) =: (M^*_{\mathcal{B}_2}(\gamma)'|T').$$

Wir setzen

$$v_1 := (1,0,0)^t, \quad v_2 := \sqrt{12}(-\frac{1}{2},1,0)^t, \quad v_3 := \sqrt{180}(\frac{1}{6},-1,1)^t$$

womit $T = (v_1, v_2, v_3)$ der gesuchten Matrix entspricht.

(c) Eine ONB von (V_2, γ) ist nach (b) gegeben über:

$$(\Phi_{\mathcal{B}_2}(v_1), \Phi_{\mathcal{B}_2}(v_2), \Phi_{\mathcal{B}_2}(v_3)) = \left(1, \sqrt{12}(t-\frac{1}{2}), \sqrt{180}(t^2-t+\frac{1}{6})\right).$$

Aufgabe P16 (Ein hinreichendes Kriterium für positive Definitheit: Diagonaldominanz).

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. A heißt *diagonaldominant*, falls für alle $i \in \{1,...,n\}$ gilt:

$$a_{ii} > \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} |a_{ij}|.$$

(Im Falle $n = 1$ ist eine leere Summe als 0 zu verstehen).

(a) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} B & u \\ u^t & a_{nn} \end{smallmatrix}\right)$. Durch simultane Zeilen/Spalten-Umformungen kann erreicht werden, dass $SAS^t = \left(\begin{smallmatrix} B-\frac{uu^t}{a_{nn}} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie diese Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{A} := B - \frac{uu^t}{a_{nn}}$ diagonaldominant ist.

(c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion und (a), (b):

$$A \text{ diagonaldominant} \quad \Rightarrow \quad A \text{ positiv definit.}$$

Lösung:

(a) Die angegebene Matrix $\left(\begin{smallmatrix} B-\frac{uu^t}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ entsteht aus $A = \left(\begin{smallmatrix} B & u \\ u^t & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ durch Elimination der Elemente in der n-ten Spalte. Daher ist

$$S = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -\frac{u}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$\tilde{A}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{in}a_{jn}}{a_{nn}}.$$

Es folgt für $i \in \{1, ..., n-1\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\{1,...,n-1\}\setminus\{i\}} |\tilde{A}_{ij}| &= \sum_{j\in\{1,...,n-1\}\setminus\{i\}} |a_{ij} - \frac{a_{in}a_{jn}}{a_{nn}}| \\
&\overset{\text{Dreiecks-Ungl.}}{\leq} \sum_{j\in\{1,...,n-1\}\setminus\{i\}} |a_{ij}| + \frac{|a_{in}|}{a_{nn}} \underbrace{\sum_{j\in\{1,...,n-1\}\setminus\{i\}} |a_{jn}|}_{=-|a_{in}|+\sum_{j\in\{1,...,n-1\}}|a_{jn}|} \\
&\overset{A \text{ diag.dom.}}{<} (a_{ii} - |a_{in}|) + \frac{|a_{in}|}{a_{nn}}(-|a_{in}| + a_{nn}) \\
&= a_{ii} - \frac{a_{in}^2}{a_{nn}} = \tilde{A}_{ii},
\end{aligned}$$

d.h. auch $\tilde{A} \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$ ist diagonaldominant.

(c) Beweis mit vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang $n = 1$: A diagonaldominant $\Rightarrow a_{11} > 0$.
  $\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt: $xAx = x^2 a_{11} > 0$.
  $\Rightarrow$ A positiv definit.
- Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei für alle Matrizen aus $M((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$ richtig.
- Induktionsschritt: Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Wir nutzen die Aufteilung in (a).
  (b), Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ $\tilde{A}$ ist positiv definit.
  Sei $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ beliebig. Setze $y := (S^{-1})^t x$ ($\Rightarrow x = S^t y$, $y \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$) und schreibe $y = (z, y_n)^t$. $\Rightarrow$
  $$x^t A x = y^t S A S^t y = z^t \tilde{A} z + a_{nn} y_n^2.$$
  $y \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \Rightarrow z \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ oder $y_n \neq 0$.
  Fall 1: $y_n \neq 0 \overset{a_{nn}>0}{\Rightarrow} x^t A x \geq a_{nn} y_n^2 > 0$.
  Fall 2: $z \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\} \Rightarrow x^t A x \geq z^t \tilde{A} z \overset{\tilde{A}\text{pos. def.}}{>} 0$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`