Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

4. Präsenzblatt

Aufgabe P13 (Bestimmung von Signatur und Orthogonalbasen).

Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n, K)$ symmetrisch. Bei einer *simultanen Zeilen/Spalten-Umformung* wird nach einer Zeilenumformung von A die analoge Spaltenumformung an A ausgeführt (Beispiel: Wird die Umformung $\lambda \cdot \text{Zeile}_i + \text{Zeile}_j \to \text{Zeile}_j$ auf A angewandt, so direkt auch $\lambda \cdot \text{Spalte}_i + \text{Spalte}_j \to \text{Spalte}_j$).

- Ist $S_1 \in \mathrm{GL}(n, K)$ die entsprechende Elementarmatrix der Zeilenumformung, so ist die entstehende Matrix gegeben durch $S_1 A S_1^t$.
- Man kann zeigen: Durch wiederholtes Anwenden simultaner Zeilen/Spalten-Umformungen $S_1, ..., S_n$ mit dem Ziel einer Zeilenstufenform wird erreicht, dass

$$(S_n \cdot ... \cdot S_1) A (S_n \cdot ... \cdot S_1)^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

  Diagonalgestalt besitzt mit $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$.
- Die Matrix $S := S_n \cdot ... \cdot S_1$ kann erhalten werden, indem **nur** die angewandten Zeilenumformungen parallel auf E_n angewandt werden.

(a) Zeigen Sie: Ist $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ eine Matrix, so dass SAS^t Diagonalgestalt besitzt, so bilden die Zeilen $v_1, ..., v_n$ von S eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ von (K^n, γ_A).

Wir betrachten nun den Spezialfall $K = \mathbb{R}$.

(b) Angenommen, durch simultante Zeilen/Spalten-Umformungen S wurde erreicht, dass

$$SAS^t = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Zeigen Sie, dass $\text{Signatur}(A) = (p, q)$ gilt.

Ist A zusätzlich positiv definit, so kann $(*)$ mit simultanen Zeilen/Spalten-Umformungen ausschließlich des Typs „Addiere Zeile u auf eine Zeile $j > i$“ erreicht werden, und außerdem

$$S \in U(n, \mathbb{R}) := \{S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) | \forall i, j \in \{1, ..., n\}, j > i : s_{ij} = 0, s_{ii} > 0\}.$$

Insbesondere gilt mit $L := S^{-1}$ die Darstellung $A = LL^t$, $L \in U(n, \mathbb{R})$. Diese Zerlegung wird auch als Cholesky-Zerlegung bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, dass die Cholesky-Zerlegung eindeutig ist, d.h. dass $L \in U(n, \mathbb{R})$ eindeutig bestimmt ist.
Bemerkung: Dann ist auch $S \in U(n, \mathbb{R})$ mit $(*)$ eindeutig bestimmt, und die Zeilen von S bilden eine (eindeutig bestimmte) Orthonormalbasis von (K^n, γ_A).

Aufgabe P14 (Signatur, Orthogonalsysteme und positive Definitheit).
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und $(p, q) = \text{Signatur}(A)$.

(a) Zeigen Sie: A negativ semidefinit $\iff p = 0$.

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von P13 jeweils $\text{Signatur}(A_i)$ und geben Sie eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \gamma_{A_i})$, $i = 1, 2, 3, 4$ an. Entscheiden Sie jeweils, ob A_i positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit ist.

Seien weitere Matrizen gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(c) Zeigen Sie: Ist A symmetrisch positiv definit, so ist A ist invertierbar und auch A^{-1} ist positiv definit.

(d) Weisen Sie nach, dass diese Matrizen positiv definit sind. Nutzen Sie dazu nacheinander die Kriterien Diagonaldominanz (P16), Hauptminoren (A16) bzw. die Signatur (A14).

(e) Geben Sie für A_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \gamma_{A_3})$ an.

Aufgabe P15 (Bestimmung von Orthonormalbasen in Polynomenräumen).
Sei $V_k = \mathbb{R}[t]_{\leq k}$ mit Basis $\mathcal{B}_k = (1, t, ..., t^k)$ für $k = 2, 3$. Wir definieren die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ und betrachten folgende Skalarprodukte auf V_k $(k = 2, 3)$:

(i) $\beta : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}, \quad \beta(p, q) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) p(t) q(t) \mathrm{d}t$,

(ii) $\gamma : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}, \quad \gamma(p, q) := \int_0^1 p(t) q(t) \mathrm{d}t$.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben.

(a) Bestimmen Sie $M^*_{\mathcal{B}_3}(\beta)$ und $M^*_{\mathcal{B}_2}(\gamma)$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(t) \mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade}, \\ (k-1)(k-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 & k \text{ gerade}. \end{cases}$$

(b) Finden Sie jeweils eine untere Dreiecksmatrix $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ bzw. $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, so dass $S M^*_{\mathcal{B}_3}(\beta) S^t = E_4$ bzw. $T M^*_{\mathcal{B}_2}(\gamma) T^t = E_3$.

(c) Nutzen Sie (b), um eine Orthonormalbasis von (V_3, β) und (V_2, γ) anzugeben.
Bemerkung: Die so ermittelten Polynome in (V_3, β) heißen (bis auf ein eventuell abweichendes Vorzeichen) Hermite-Polynome.

Aufgabe P16 (Ein hinreichendes Kriterium für positive Definitheit: Diagonaldominanz).

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. A heißt *diagonaldominant*, falls für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$a_{ii} > \sum_{j \in \{1,...,n\} \setminus \{i\}} |a_{ij}|.$$

(Im Falle $n = 1$ ist eine leere Summe als 0 zu verstehen).

(a) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} B & u \\ u^t & a_{nn} \end{smallmatrix}\right)$. Durch simultane Zeilen/Spalten-Umformungen kann erreicht werden, dass $SAS^t = \begin{pmatrix} B - \frac{uu^t}{a_{nn}} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$. Geben Sie diese Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{A} := B - \frac{uu^t}{a_{nn}}$ diagonaldominant ist.

(c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion und (a), (b):

$$A \text{ diagonaldominant} \quad \Rightarrow \quad A \text{ positiv definit.}$$

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`