Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

3. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P9 (Trigonalisierung einer Matrix).
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}).$$

Es ist bereits bekannt, dass $\chi_A = (t-1)^2(t-2)^2$.

(a) Zeigen Sie anhand von $\mathrm{Eig}(A, 1)$, dass A nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Trigonalisieren Sie A, d.h. geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ an, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.
Durchlaufen Sie die Eigenwerte im iterativen Verfahren in der Reihenfolge $1, 1, 2, 2$.

Lösung:
Anleitung zum Trigonalisieren einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ (sei $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis):

(1) Berechne $\chi_A = (t - \lambda_1) \cdot ... \cdot (t - \lambda_n)$.

(2) Setze $A_1 := A$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$. **Kurzfassung:** Setze $A'_1 := A_1$ und starte direkt bei Schritt k unten mit $k = 1$.

(3) **Schritt 1:** Berechne Eigenvektor $v_1 \in \mathrm{Eig}(A_1, \lambda_1)$.

(4) Wähle $j_1 \in \{1, ..., n\}$ so, dass $\mathcal{B}_2 = (v_1, e_1, ..., \hat{e}_{j_1}, ..., e_n)$ immer noch Basis von K^n. Hierbei bedeutet $\hat{e}_j$, dass der Vektor NICHT mehr in der Basis vorkommt, also gestrichen wird.
(Mit anderen Worten, $\mathcal{B}_2$ enthält nun v_1, aber einer der Einheitsvektoren wird herausgestrichen - welchen, darf man sich selbst aussuchen, solange $\mathcal{B}_2$ immer noch eine Basis ist). Setze $\mathcal{B}_2^- := (e_1, ..., \hat{e}_{j_1}, ..., e_n)$. (Basis $\mathcal{B}_2$ außer v_1).

(5) Setze $S_1^{-1} := T_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}_2$ (schreibe $\mathcal{B}_2$ in Matrix als Spalten), dann gilt

$$A_2 := M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\tilde{A}) = T_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\tilde{A}) T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2} = S_1 A S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Berechne also mittels $A_2 = S_1 A S_1^{-1}$ und darauf basierend die Matrix $A'_2 \in M((n-1) \times (n-1), K)$.

(6) **Schritt 2:** Aus der VL ist bekannt, dass $\chi_{A_2'} = (t-\lambda_2)\cdot ... \cdot (t-\lambda_n)$ gilt. Berechne Eigenvektor $w_2 \in \mathrm{Eig}(A_2', \lambda_2) \subset K^{n-1}$.
Achtung: $w_2 = \Phi_{\mathcal{B}_2^-}^{-1}(v_2)$ *ist ein Koordinatenvektor bzgl. der Basis* $\mathcal{B}_2^-$, *da* A_2' *Darstellungsmatrix bzgl.* $\mathcal{B}_2^-$ *ist. Der zugehörige Vektor* $v_2 \in K^n$ *ergibt sich durch:*
Setze $v_2 := \Phi_{\mathcal{B}_2^-}(w_2)$.

(7) Wähle $j_2 \in \{1, ..., n\}\backslash\{j_1\}$ so, dass $\mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, e_1, ..., \hat{e}_{j_1}, ..., \hat{e}_{j_2}, ..., e_n)$ immer noch Basis von K^n.
Setze $\mathcal{B}_3^- := (e_1, ..., \hat{e}_{j_1}, ..., \hat{e}_{j_2}, ..., e_n)$.

(8) Setze $S_2^{-1} := T_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} = \mathcal{B}_3$, dann gilt

$$A_3 := M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_3}(\tilde{A}) = S_2 A S_2^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3' & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung von $A_3 = S_2 A S_2^{-1}$ kann mittels der Basiswechselformel abgekürzt werden:

$$A_3 = M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_3}(\tilde{A}) = T_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2} \underbrace{T_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}} A T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2}}_{=A_2} T_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} = T_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2} A_2 T_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}.$$

A_2 ist bereits bekannt und $T_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$ kann leicht hingeschrieben werden (nur der neue Vektor v_2 muss durch v_1 und die noch nicht gelöschten Einheitsvektoren dargestellt werden).

(9) ...

(10) **Schritt *k*:** Es ist $\chi_{A_k'} = (t-\lambda_k)\cdot ... \cdot (t-\lambda_n)$. Berechne $w_k \in \mathrm{Eig}(A_k', \lambda_k)$.
Setze $v_k := \Phi_{\mathcal{B}_k^-}(w_k)$.

(11) Wähle $j_k \in \{1, ..., n\}\backslash\{j_1, ..., j_{k-1}\}$ so, dass $\mathcal{B}_{k+1} = (v_1, ..., v_k, e_1, ..., \hat{e}_{j_1}, ..., \hat{e}_{j_k}, ..., e_n)$ immer noch Basis von K^n.

(12) (Setze $S_k^{-1} := T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{k+1}}$). Berechne $A_{k+1} := T_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\mathcal{B}_k} A_k T_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{B}_{k+1}}$ und sei A_{k+1}' der $((n-k)\times(n-k))$-Block ganz unten rechts in A_{k+1}.

(13) ...

(14) **Ende Schritt** $n-1$ (oder früher, falls bereits früher Dreiecksgestalt erreicht): Es ist $S_{n-1}^{-1} = \mathcal{B}_n$ die gesucht Transformationsmatrix und die gesuchte Basis, bzgl. der $M_{\mathcal{B}_n}^{\mathcal{B}_n}(\tilde{A}) = S_{n-1} A S_{n-1}^{-1}$ Dreiecksgestalt besitzt.

Ist statt einer Matrix A ein $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben, so bestimme zunächst eine Darstellungmatrix $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi)$ bzgl. einer beliebigen (einfachen) Basis $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$. Wende dann obigen Algorithmus auf A an. Wenn $A_n = M_{\mathcal{B}_n}^{\mathcal{B}_n}(\tilde{A})$ mit $\mathcal{B}_n = (v_1, ..., v_n)$ Dreiecksgestalt hat, muss $\tilde{\mathcal{C}} = (\Phi_{\mathcal{C}}(v_1), ..., \Phi_{\mathcal{C}}(v_n))$ gewählt werden, so dass $M_{\tilde{\mathcal{C}}}^{\tilde{\mathcal{C}}}(\varphi) = A_n$ gilt.

(a) Es ist $\mathrm{Eig}(A, 1) = \mathrm{Kern}(E_4 - A)$:

$$\lambda \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwende (-1)-Trick $\implies$ $\mathrm{Kern}(E_4 - A) = \mathrm{Lin}(v_1)$, wobei $v_1 = (1, 0, -1, -1)^t$. Damit:

$$\mu_{\mathrm{geo}}(A, 1) = 1 \neq 2 = \mu_{\mathrm{alg}}(A, 1),$$

d.h. A ist über $\mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar nach (15.24).

(b) Initialisiere Trigonalisierungs-Algortihmus:

- **Schritt 1**: In (a) wurde $\mathrm{Eig}(A, 1)$ bereits ermitelt. Offenbar ist $\mathcal{B}_1 = (v_1, e_2, e_3, e_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Setze $\mathcal{B}_1^- = (e_2, e_3, e_4)$. Setze

$$S_1^{-1} := (v_1, e_2, e_3, e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\tilde{A}) = S_1 A S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- **Schritt 2:** Wir trigonalisieren nun die Matrix $A_2' = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
$\chi_{A_2'}$ erfüllt $(t-1)\chi_{A_2'} = \chi_A$, d.h. $\chi_{A_2'} = (t-1)(t-2)^2$.
Bestimme $\mathrm{Eig}(A_2', 1) = \mathrm{Kern}(E_3 - A_2')$:

$$E_4 - A_2' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwende (-1)-Trick $\implies$ $\mathrm{Kern}(E_3 - A_2') = \mathrm{Lin}(w_2)$, wobei $w_2 = (0, 1, 1)^t$.
$\implies v_2 = \Phi_{\mathcal{B}_1^-}(w_2) = e_3 + e_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Offenbar ist $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, e_2, e_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Setze $\mathcal{B}_2^- = (e_2, e_3)$. Setze

$$S_2^{-1} := (v_1, v_2, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\tilde{A}) = S_2 A S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Schritt 3:** Wir trigonalisieren die Matrix $A_3' = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
$\chi_{A_3'}$ erfüllt $(t-1)^2\chi_{A_3'} = \chi_A$, d.h. $\chi_{A_3'} = (t-2)^2$.
Bestimme $\mathrm{Eig}(A_3', 2) = \mathrm{Kern}(2E_2 - A_3')$:

$$2E_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verwendung (-1)-Trick $\implies$ $\mathrm{Kern}(2E_2 - A_3') = \mathrm{Lin}(w_3)$, wobei $w_3 = (0,1)^t$.
$\implies v_3 = \Phi_{\mathcal{B}_2^-}(w_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Offenbar ist $\mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, v_3, e_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Setze

$$S_3^{-1} = (v_1, v_2, v_3, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_3}(\tilde{A}) = S_3 A S_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P10 (Nilpotenz und Anwendung der Trigonalisierung).
Es sei K ein Körper und $D, N \in M(n \times n, K)$.

(a) Sei N nilpotent und $DN = ND$. Zeigen Sie: Dann ist auch DN nilpotent.

(b) Es gelte $DN = ND$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$(D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}.$$

Hinweis: Nutzen Sie zum Beweis vollständige Induktion und die Eigenschaft $\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} = \binom{m+1}{j}$ *des Binomialkoeffizienten für* $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$.

(c) Sei N nilpotent mit $N^m = 0$ ($m \in \mathbb{N}$) und $DN = ND$. Zeigen Sie unter Nutzung von (a), dass für $n \geq m-1$ gilt:

$$(D+N)^n = D^{n-m+1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} N^k D^{m-1-k}.$$

(d) Es sei $J \in M(n \times n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix mit gleichen Diagonaleinträgen $\lambda \in K$. Definiere $D := \lambda \cdot E_n$ und $N := J - D$ (und damit $J = D + N$). Zeigen Sie, dass N nilpotent ist und $DN = ND$ gilt.

(e) Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $a_0 = a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (*).$$

- Finden Sie $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass $(*)$ äquivalent ist zu

$$\left(\begin{smallmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{smallmatrix}\right) = A \cdot \left(\begin{smallmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{smallmatrix}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Finden Sie $S \in \mathrm{GL}(2, K)$, so dass $SAS^{-1} = J$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
- Nutzen Sie die Ergebnisse aus P10(b) und (c), um eine explizite Formel für a_n, $n \geq 2$, anzugeben.

Lösung:

(a) N nilpotent $\Rightarrow N^n = 0$.
Wir zeigen per Induktion: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $(DN)^k = D^k N^k$. (Damit folgt die Behauptung für $k = n$).

- Induktionsanfang $k = 1$: $(DN)^1 = DN = D^1 N^1$.
- Induktionsvoraussetzung (IV): Die Aussage sei für k richtig.
- Induktionsschritt: $(DN)^{k+1} = DN \cdot DN \cdot \ldots \cdot DN = D(ND)^k N \overset{ND=DN}{=} D(DN)^k N \overset{IV}{=} DD^k N^k N = D^{k+1} N^{k+1}$.

(b) Induktionsanfang $n = 1$: $(D+N)^1 = D + N = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$ wegen $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.
Induktionsvoraussetzung (IV): Die Aussage gelte für n.
Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
(D+N)^{n+1} &= (D+N)\cdot(D+N)^n \overset{\text{IV}}{=} (D+N)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\
&\overset{DN=ND}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} N^k D^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} N^{k+1} D^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} N^k D^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} N^k D^{n+1-k} \\
&= D^{n+1} + N^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left\{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right\}}_{=\binom{n+1}{k}} N^k D^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} N^k D^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

(c) Mit der Formel aus P10(b) gilt:

$$
\begin{aligned}
(D+N)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0 \quad (k\geq m)} D^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{k} N^k \underbrace{D^{n-k}}_{=D^{m-1-k}\cdot D^{n-(m-1)}} \\
&= D^{n-m+1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{k} N^k D^{m-1-k}.
\end{aligned}
$$

(d) (i) Für N gilt per Definition: $N_{ij} = 0$, $i \geq j$ (obere Dreiecksmatrix ohne Diagonale). Daher ist

$$
\chi_N = \det(tE_n - N) = \det \begin{pmatrix} t & * & \dots & * \\ 0 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & t \end{pmatrix} \overset{\text{obere Dreiecksm.}}{=} t^n.
$$

Vorlesung, Charakterisierung Nilpotenz $\Rightarrow N$ nilpotent.

(ii) Seien $i, j \in \{1, ..., n\}$ beliebig. Dann gilt

$$(DN)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik} N_{kj} \overset{D \text{ diagonal}}{=} D_{ii} N_{ij},$$
$$(ND)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} N_{ik} D_{kj} \overset{D \text{ diagonal}}{=} D_{jj} N_{ij}.$$

D hat nur gleiche Einträge ($D_{ii} = \lambda = D_{jj}$) $\Rightarrow (DN)_{ij} = (ND)_{ij}$.
Daher $DN = ND$.

(e) (i) $(*)$ ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(ii) Ziel zunächst: Bestimme die Eigenwerte von A über

$$\chi_A = \det(t \cdot E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-6 & 9 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t(t-6) + 9 = (t-3)^2.$$

Wir erhalten als einzigen Eigenwert $\lambda = 3$.
Für das Minimalpolynom gilt $\mu_A \in \{(t-3), (t-3)^2\}$. Allerdings gilt offensichtlich $(A - 3E_3) \neq 0$. $\implies \mu_A = (t-3)^2 \implies A$ ist nicht diagonalisierbar.
Starte Trigonalisierungs-Algorithmus:

- **Schritt 1**: $\mathrm{Eig}(A, 3) = \mathrm{Kern}(3 \cdot E_2 - A)$:

$$3 \cdot E_2 - A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwendung (-1)-Trick $\implies \mathrm{Kern}(3 \cdot E_2 - A) = \mathrm{Lin}(v_1)$, wobei $v_1 = (3, 1)^t$.
Offenbar ist $\mathcal{B} := (v_1, e_1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Definiere

$$S^{-1} := (v_1, e_1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =: J.$$

(iii) Schreibe $J = D + N$ mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = 3E_2$.
Es gilt $N^2 = 0$, d.h. $N^m = 0$ mit $m = 2$.

P10(b),(c) $\Rightarrow J^n = D^{n-1} \cdot \big[D + n \cdot N\big]$.

$A = S^{-1} J S \Rightarrow A^n = S^{-1} J^n S = S^{-1} D^{n-1} \cdot \big[D + n \cdot N\big] S.$

Rekursion $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{S^{-1}}_{=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \underbrace{D^{n-1}}_{=3^{n-1}E_2} \cdot \underbrace{\underbrace{[D + n \cdot N]}_{=\begin{pmatrix} 3 & n \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}_{=\begin{pmatrix} 3-2n \\ -6 \end{pmatrix}} \\
&= 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 3-6n \\ 3-2n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d.h. $a_n = 3^{n-1}(3-2n)$.

Aufgabe P11 (Rechnen mit Bilinearformen und deren Darstellungsmatrix).
Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen $\gamma : V \times V \to K$ um Bilinearformen oder sogar um symmetrische Bilinearformen handelt:

(i) $\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2$,

(ii) $\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + y_1$,

(iii) $\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$,

(iv) $\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$.

(b) Sei nun $V = K[t]_{\leq 2}$, und $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ die Monombasis von V sowie $\mathcal{C} = (1+t, 1+t+t^2, 1-t)$ eine weitere Basis von V. Eine Abbildung $\gamma : V \times V \to K$ sei gegeben durch

$$\gamma(p, q) := p(1)q(1) - p(0)q(0).$$

(i) Zeigen Sie, dass γ eine symmetrische Bilinearform ist.

(ii) Berechnen Sie $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

(iii) Ermitteln Sie $T^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

(iv) Berechnen Sie $M^*_{\mathcal{C}}(\gamma)$ mittels der Basiswechselformel für Bilinearformen.

(v) Seien $p := 2 + t, q = 3t + t^2 \in K[t]_{\leq 2}$. Berechnen Sie $\gamma(p, q)$ mit Hilfe von $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

Lösung: (a) (i) γ ist keine Bilinearform, denn:

$$\begin{aligned}
\gamma(2 \cdot (1,1), (1,1)) &= \gamma((2,2), (1,1)) = 4 + 1 = 5 \neq \\
2 \cdot \gamma((1,1), (1,1)) &= 2 \cdot (1+1) = 4.
\end{aligned}$$

(ii) γ ist keine Bilinearform, denn:

$$\begin{aligned}
\gamma((1,1) + (1,2), (1,1)) &= \gamma((2,2), (1,2)) = 2 + 1 = 3 \neq \\
\gamma((1,1), (1,1)) + \gamma((1,2), (1,1)) &= (1+1) + (1+1) = 4.
\end{aligned}$$

(iii) γ ist eine Bilinearform, denn für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ gilt:

$$\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} (y_1, y_2)^t,$$

d.h. $\gamma = \gamma_A^{(e_1,e_2)}$.
γ ist nicht symmetrisch, da A nicht symmetrisch ist.

(iv) γ ist eine Bilinearform, denn für alle $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in V$ gilt:

$$\gamma((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{=:A}(y_1,y_2)^t,$$

d.h. $\gamma = \gamma_A^{(e_1,e_2)}$.
γ ist symmetrisch, da A symmetrisch ist.

(b) (i) γ ist symmetrisch, denn für alle $p, q \in V$ gilt:

$$\gamma(q,p) = q(1)p(1) - q(0)p(0) = p(1)q(1) - p(0)q(0) = \gamma(p,q).$$

Damit genügt es, die Linearität im 1. Argument zu zeigen. Seien $p_1, p_2, p, q \in V$ und $\lambda \in K$, dann ist

$$\begin{aligned}\gamma(p_1+p_2,q) &= (p_1+p_2)(1)q(1) - (p_1+p_2)(0)q(0)\\ &= [p_1(1)q(1) - p_1(0)q(0)] + [p_2(1)q(1) - p_2(0)q(0)]\\ &= \gamma(p_1,q) + \gamma(p_2,q),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda p,q) &= (\lambda p)(1)q(1) - (\lambda p)(0)q(0) = \lambda p(1)q(1) - \lambda p(0)q(0)\\ &= \lambda[p(1)q(1) - p(0)q(0)] = \lambda\gamma(p,q).\end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}^*(\gamma) = \big(\gamma(t^i,t^j)\big)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(iii) Es ist

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_V) = \big(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(1+t) \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(1+t+t^2) \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(1-t)\big) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned}M_{\mathcal{C}}^*(\gamma) &= (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^t \cdot M_{\mathcal{B}}^*(\gamma) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 5 & 8 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(v) Es gilt

$$\begin{aligned}\gamma(p,q) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(p)^t M_{\mathcal{B}}^*(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(q) = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 4\end{pmatrix} = 12.\end{aligned}$$

Aufgabe P12 (Alternierende Bilinearformen).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Eine Bilinearform $\tau \in \operatorname{Bil}_K(V)$ heißt *alternierend*, falls

$$\forall v, w \in V: \quad \tau(v, w) = -\tau(w, v).$$

Sei $\gamma \in \operatorname{Bil}_K(V)$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt $\gamma_a, \gamma_s \in \operatorname{Bil}_K(V)$ mit $\gamma = \gamma_a + \gamma_s$, so dass γ_a alternierend und γ_s symmetrisch ist.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$. Es sei $\gamma((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := \det\left(\begin{smallmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass γ eine alternierende Bilinearform ist.

Lösung:

(a) Definiere für $v, w \in V$:

$$\gamma_s(v, w) := \frac{1}{2}(\gamma(v, w) + \gamma(w, v)), \qquad \gamma_a(v, w) := \frac{1}{2}(\gamma(v, w) - \gamma(w, v)).$$

Damit gilt:

$$\gamma_a(v, w) + \gamma_s(v, w) = \frac{1}{2}(\gamma(v, w) - \gamma(w, v)) + \frac{1}{2}(\gamma(v, w) + \gamma(w, v)) = \gamma(v, w),$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_s(w, v) &= \frac{1}{2}(\gamma(w, v) + \gamma(v, w)) = \frac{1}{2}(\gamma(v, w) + \gamma(w, v)) = \gamma_s(v, w), \\ \gamma_a(w, v) &= \frac{1}{2}(\gamma(w, v) - \gamma(v, w)) = -\frac{1}{2}(\gamma(v, w) - \gamma(w, v)) = \gamma_a(v, w), \end{aligned}$$

d.h. γ_s ist symmetrisch und γ_a ist alternierend.
Dass γ_s, γ_a wieder Bilinearformen sind, kann elementar nachgerechnet werden. Aufgrund der Eigenschaften (Symmetrie bzw. Alternierend) muss nur Linearität in der 1. Komponente nachgerechnet werden.

(b) Seien $v_1, v_2, v, w \in V = \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in K = \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$\gamma(v, w) = \det(v, w) \overset{\text{Vertauschen Spalten, Regel Det.}}{=} -\det(w, v) = -\gamma(w, v),$$

d.h. γ ist alternierend; außerdem ist

$$\gamma(\lambda v, w) = \det(\lambda v, w) \overset{\text{Mult. Spalte, Regel Det.}}{=} \lambda \det(v, w) = \lambda \gamma(v, w),$$

und

$$\gamma(v_1 + v_2, w) = \det(v_1 + v_2, w) \overset{\text{Det. multilinear}}{=} \det(v_1, w) + \det(v_2, w) = \gamma(v_1, w) + \gamma(v_2, w).$$

Damit ist γ linear im 1. Argument. Da γ alternierend ist, folgt damit auch die Linearität im 2. Argument.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`