2. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P6 (Minimalpolynome und Inverse).

Seien $\varphi_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k)$ gegeben durch $\varphi_i = \tilde{A}_i$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bereits bekannt ist:

$$\chi_{A_1} = t^3, \quad \chi_{A_2} = (t-2)(t-1)(t+1).$$

(a) Lösen Sie die folgenden Aufgaben für $i = 1, 2, 3, 4$:

(i) Ermitteln Sie das Minimalpolynom μ_{φ_i}.
Nutzen Sie bei A_4 ohne Beweis: Ist $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, so gilt stets auch $\chi_\varphi | \mu_\varphi^{dim(V)}$.

(ii) Ist φ_i diagonalisierbar?

(iii) Ist φ_i bijektiv? Geben Sie dann ein Polynom $p \in \mathbb{R}[t]$ mit $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(\mu_{\varphi_i}) - 1$ an mit $\varphi_i^{-1} = p(\varphi_i)$.

(b) Geben Sie jeweils eine Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ an, welche die angegebenen Minimal- und charakteristischen Polynome aus $\mathbb{R}[t]$ besitzt.

(i) $\chi_A = t^3$ und $\mu_A \in \{t, t^2, t^3\}$.

(ii) $\chi_A = (t-1)^2(t-3)$ und $\mu_A \in \{(t-1)(t-3), (t-1)^2(t-3)\}$.

Lösung:

(a) (i)

- Es ist $\mu_{A_1} \in \{t, t^2, t^3\}$. Nun gilt $A_1 \neq 0$, aber $A_1^2 = 0$. $\implies \mu_{A_1} = t^2$.
- Nach (16.6)/(16.7) gilt direkt $\mu_{A_2} = (t-2)(t-1)(t+1)$.
- Bestimme das charakteristische Polynom:

$$\chi_{A_3} = \det(tE_3 - A_3) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & -1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \overset{\text{obere Dreiecksm.}}{=} (t-1)(t-2)^2.$$

$\implies \mu_{A_3} \in \{(t-1)(t-2), (t-1)(t-2)^2\}$.
Es ist

$$(A - E_3)(A - 2E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\implies \mu_{A_3} = (t-1)(t-2)^2$.

- Bestimme das charakteristusche Polynom:

$$\begin{aligned}\chi_{A_4} &= \det(tE_4 - A_4) = \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & -1 & t \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Blockmatrix}}{=} \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = (t-1)^2(t^2+1).\end{aligned}$$

  Wir zeigen nun, dass $t^2+1 \in \mathbb{R}[t]$ über $\mathbb{R}[t]$ irreduzibel ist: Seien $f, g \in \mathbb{R}[t]$ mit $t^2+1 = f \cdot g$. $\overset{\text{Gradformel}}{\Rightarrow}$ $2 = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$.
  Falls $\operatorname{grad}(f) = 0$ oder $\operatorname{grad}(g) = 0$, so ist $f \in \mathbb{R}$ oder $g \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f \in R[t]^*$ oder $g \in R[t]^*$
  Falls $\operatorname{grad}(f) = 1 = \operatorname{grad}(g)$, so wären f, g Linearfaktoren und hätten Nullstellen $\Rightarrow$ auch t^2+1 hätte Nullstellen in $\mathbb{R}$, Widerspruch! Dieser Fall kann also nicht eintreten.

  $\mu_{A_4} | \chi_{A_4} | \mu_{A_4}^4 \implies \chi_{A_4}$ enthält genau die irreduziblen Faktoren von μ_{A_4}, aber eventuell in geringerer Potenz (mindestens jedoch einmal). $\Rightarrow \mu_{A_4} \in \{(t^2+1)(t-1), (t^2+1)(t-1)^2\}$.
  Es gilt

$$(A^2+E_4)(A-E_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

  $\implies \mu_{A_4} = (t^2+1)(t-1)$.

(ii) Wir verwenden Satz (16.9):

- A_1 ist nicht diagonalisierbar, da μ_{A_1} eine doppelte Nullstelle besitzt.
- A_2 ist diagonalisierbar, da μ_{A_2} in Linearfaktoren mit einfachen Nullstellen zerfällt.
- A_3 ist nicht diagonalisierbar, da μ_{A_3} eine doppelte Nullstelle besitzt.
- A_4 ist nicht diagonalisierbar, da μ_{A_4} nicht in Linearfaktoren zerfällt.

(iii) Sei $\varphi \in \operatorname{Aut}_K(V)$ und $\mu_\varphi = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ das Minimalpolynom von φ.
$\overset{\text{P8(a)}}{\implies} \varphi^{-1} = p(\varphi)$, wobei $p = -\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{c_0} t^{k-1}$.

- $\lambda = 0$ ist Nullstelle von χ_{A_1}, d.h. Eigenwert von $\varphi_1 \implies \varphi_1$ nicht bijektiv.
- χ_{A_2} hat genau die Nullstellen $\lambda \in \{-1, 1, 2\}$
  $\Rightarrow$ kein Eigenwert von φ_2 ist $0 \Rightarrow \varphi_2$ bijektiv.
  Es ist $\mu_{A_2} = t^3 - 2t^2 - t + 2$.
  $\implies p = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$
- χ_{A_3} hat genau die Nullstellen $\lambda \in \{1, 2\}$
  $\Rightarrow$ kein Eigenwert von φ_3 ist $0 \Rightarrow \varphi_3$ bijektiv.
  Es ist $\mu_{A_3} = t^3 - 5t^2 + 8t - 4$.
  $\implies p = \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{4}t + 2$
- χ_{A_4} hat nur die Nullstelle $\lambda = 1$
  $\Rightarrow$ kein Eigenwert von φ_4 ist $0 \Rightarrow \varphi_4$ ist bijektiv.
  Es ist $\mu_{A_4} = t^3 - t^2 + t - 1$.
  $\implies p = t^2 - t + 1$.

(b) (i) $A = 0$ hat $\mu_A = t$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat $\mu_A = t^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat $\mu_A = t^3$.

Ansatz (grob): Bei $\mu_A = t$ kann man Diagonalmatrix wählen; bei den anderen μ_A sorge dafür, dass Eigenräume zu 0 immer kleiner werden!

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat $\mu_A = (t-1)(t-3)$ (da diagonalisierbar).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat $\mu_A = (t-1)^2(t-3)$ (durch zusätzliche 1 wird Eigenraum zu 1 nur eindimensional).

Aufgabe P7 (Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen zwischen Polynomräumen).

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $K[t]_{\leq n} := \{p \in K[t] : \operatorname{grad}(g) \leq n\}$ ist zusammen mit der in der Vorlesung definierten Addition und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot p := \sum_{j=0}^{n} (\lambda \cdot a_j) t^j, \qquad p = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \in K[t], \qquad \lambda \in K$$

ein K-Vektorraum. Eine Basis ist gegeben durch die so genannte *Monombasis* $\mathcal{B} = (1, t, ..., t^n)$. Im Folgenden betrachten wir die linearen Abbildungen

$$\varphi_1 : K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}, \qquad \sum_{j=0}^{2} a_j t^j \mapsto \sum_{j=1}^{2} j a_j t^{j-1} \quad (\text{ formale Ableitung }),$$

$$\varphi_2 : K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}, \qquad f \mapsto f(0) + \big[f(1) - f(-1)\big]t + \big[f(1) + f(-1)\big]t^2.$$

Sei nun $K = \mathbb{Q}$.

(a) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_i)$, $i = 1, 2$.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_{φ_i}, $i = 1, 2$.

(c) Berechnen Sie das Minimalpolynom μ_{φ_i}, $i = 1, 2$.

(d) Entscheiden Sie auf Basis von (c), ob φ_i diagonalisierbar ist.
Geben Sie gegebenenfalls eine Basis $\mathcal{B}'$ aus Eigenvektoren an, so dass $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi_i)$ diagonal ist.

(e) Entscheiden Sie auf Basis von (b), ob φ_i bijektiv ist. Geben Sie in diesem Falle ein Polynom $p \in K[t]$ mit $\operatorname{grad}(p) = \operatorname{grad}(\mu_{\varphi_i}) - 1$ und $\varphi_i^{-1} = p(\varphi_i)$ an und berechnen Sie damit φ_i^{-1}.

Lösung:

Für φ_1:

(a) Es ist

$$\varphi_1(1) = 0, \quad \varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_1(t^2) = 2t,$$

damit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\chi_{\varphi_1} = \det(tE_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -2 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = t^3.$$

(c) Mögliche Minimalpolynome μ_{φ_1} sind alle Polynome aus der Menge $H := \{t^k : k \in \{1,2,3\}\}$. Hier ist

$$\begin{aligned} p &= t \in K[t] \Rightarrow p(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1) \neq 0, \\ p &= t^2 \in K[t] \Rightarrow p(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0; \end{aligned}$$

damit ist $\mu_{\varphi_1} = \chi_{\varphi_1} = t^3$.

(d) μ_{φ_1} zerfällt zwar in Linearfaktoren, hat aber die Nullstelle $\lambda_1 = 0$ mit Vielfachheit 3 $\Rightarrow$ φ_1 nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.

(e) χ_{φ_1} hat Nullstelle $\lambda_1 = 0$, d.h. φ_1 hat Eigenwert 0. $\overset{P4(a)}{\Rightarrow}$ φ_1 nicht bijektiv.

Für φ_2:

(a) Es ist

$$\varphi_2(1) = 1 + 2t^2, \quad \varphi_2(t) = 2t, \quad \varphi_2(t^2) = 2t^2,$$

damit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\chi_{\varphi_2} = \det(tE_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2)) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 0 \\ -2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \overset{\text{untere Dreiecksm.}}{=} (t-1)(t-2)^2.$$

(c) Mögliche Minimalpolynome μ_{φ_2} sind alle Polynome aus der Menge $H := \{(t-1)(t-2), (t-1)(t-2)^2\}$. Hier ist

$$p = (t-1)(t-2) \in K[t] \Rightarrow p(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

damit ist $\mu_{\varphi_2} = (t-1)(t-2)$.

(d) μ_{φ_2} zerfällt in Linearfaktoren und hat nur einfache Nullstellen $\Rightarrow$ φ_2 ist diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.
Berechnung Eigenvektoren mit Hilfe der Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2)$: Eigenwerte von φ_2 sind Nullstelle von μ_{φ_2} $\Rightarrow$ Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

- $\mathrm{Eig}(\varphi_2, 1) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathrm{Eig}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2), 1)) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathrm{Kern}(E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2)))$,

$$E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2))$ ist $w_1 = (-1, 0, 2)^t$
$\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi_2, 1)$ ist $v_1 = \Phi_{\mathcal{B}}(w_1) = -1 + 2t^2$.

- $\mathrm{Eig}(\varphi_2, 2) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathrm{Eig}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2), 2)) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathrm{Kern}(2E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2))),$

$$2E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  (-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(2E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2))$ ist (w_1, w_2) mit $w_2 = (0,1,0)^t$, $w_3 = (0,0,1)^t$
  $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi_2, 2)$ ist (v_2, v_3) mit $v_2 = \Phi_{\mathcal{B}}(w_2) = t$, $v_3 = \Phi_{\mathcal{B}}(w_3) = t^2$.

Mit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3) = (-1 + 2t^2, t, t^2)$ gilt also $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) χ_{φ_2} hat nur Nullstellen verschieden von Null, d.h. φ_2 hat nicht den Eigenwert 0. $\overset{P4(a)}{\Rightarrow}$ φ_2 ist bijektiv.
P5(a), $\mu_{\varphi_2} = (t-1)(t-2) = t^2 - 3t + 2 \Rightarrow \varphi_2^{-1} = p(\varphi_2)$ mit $p = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$.

Aufgabe P8 (Minimalpolynome und Eigenwerte von Endomorphismen).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$.

(a) Zeigen Sie: Ist f bijektiv, so gibt es ein Polynom $p \in K[t]$ mit $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(\mu_f) - 1$, so dass $f^{-1} = p(f)$.

(b) Zeigen Sie: Gibt es $v \in V$ und $r \in \mathbb{N}$, so dass $v, f(v), ..., f(v)^{r-1}$ linear unabhängig sind, so gilt $\mathrm{grad}(\mu_f) \geq r$.

(c) Sei $f^2 = \mathrm{id}_V$ mit $f \neq \mathrm{id}_V$, $f \neq -\mathrm{id}_V$. Geben Sie das Minimalpolynom von f an und zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

(d) (i) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda \in K$ und gilt $g(v) \neq 0$, dann ist $g(v)$ ein Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.
(ii) Ist V endlichdimensional, so haben $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Eigenwerte.

Lösung:

(a) Sei $\mu_f = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ das Minimalpolynom von f.
f bijektiv $\Rightarrow$ Kein Eigenwert von f ist Null $\Rightarrow \chi_f(0) \neq 0$.
Minimalpolynom, charakteristisches Polynom haben die gleichen Nullstellen $\Rightarrow c_0 = \mu_f(0) \neq 0$.
Es folgt

$$0 = \sum_{k=0}^{n} c_k f^k = f \sum_{k=1}^{n} c_k f^{k-1} + c_0 \mathrm{id}_V$$

$$\overset{f \text{ bij.}}{\Longleftrightarrow} \quad f^{-1} = -\frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^{n} c_k f^{k-1} = p(f),$$

wobei $p = -\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{c_0} t^{k-1}$ und $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(\mu_f) - 1$.

(b) Es gilt $s := \mathrm{grad}(\mu_f) \geq 1$ (μ_f ist normiert). Sei

$$\mu_f = \sum_{j=0}^{s} c_j t^j, \qquad c_j \in K, \quad c_s = 1.$$

Es gilt $0 = \mu_f(f)$, also auch

$$0 = \mu_f(f)(v) = \Big(\sum_{j=0}^{s} c_j f^j\Big)(v) = \sum_{j=0}^{s} c_j f^j(v).$$

Wäre $s \leq r-1 \overset{v, f(v), ..., f(v)^{r-1} \text{ linear unabh.}}{\Rightarrow} c_0 = ... = c_s = 0$, Widerspruch zu $c_s = 1$.
Also $\mathrm{grad}(\mu_f) = s \geq r-1$.

(c) Es ist $f^2 - \mathrm{id}_V = 0$, d.h. $p = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$ erfüllt $p(f) = 0$.
Definition $\mu_f \Rightarrow \mu_f | (t-1)(t+1)$.
$f \neq \mathrm{id}_V$, $f \neq -\mathrm{id}_V \Rightarrow \mu_f = (t-1)(t+1)$.
μ_f zerfällt in Linearfaktoren und hat nur einfache Nullstellen $\Rightarrow f$ diagonalisierbar.

(d) (i) Es gilt $(f \circ g)(v) = f(g(v)) = \lambda v$ und $g(v) \neq 0$. Dann folgt

$$(g \circ f)(g(v)) \overset{\text{Assoz.}}{=} g(f(g(v))) = g(\lambda v) \overset{\text{linear}}{=} \lambda g(v).$$

Also ist $g(v)$ Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.

(ii) Wir zeigen: Ist λ Eigenwert von $f \circ g$, dann ist er auch Eigenwert von $g \circ f$. Analog zeigt man die umgekehrte Aussage.
Sei λ Eigenwert von $f \circ g$. Sei $v \in V \backslash \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

- Fall 1: $g(v) \neq 0$. Dann folgt mit (i): λ ist Eigenwert von $g \circ f$ (zum Eigenvektor $g(v)$).
- Fall 2: $g(v) = 0$.

$$\lambda v = f(g(v)) = f(0) = 0.$$

  Also ist $\lambda = 0$. Wir zeigen, dass 0 auch ein Eigenwert von $g \circ f$ ist.
  - Fall 2.1: $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$.
    Dann existiert $0 \neq w \in V$ und $f(w) = 0$.
    Es gilt sofort $(g \circ f)(w) = g(f(w)) = 0$ und damit ist 0 ein Eigenwert von $g \circ f$.
  - Fall 2.2: $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.
    Dann ist f injektiv und, da $\dim_K(V) < \infty$, auch bijektiv.
    $\Longrightarrow \exists\, w \in V \setminus \{0\} : w = f^{-1}(v)$.
    $\Longrightarrow (g \circ f)(w) = g(f(f^{-1}(v))) = g(v) = 0$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`