2. Präsenzblatt

Aufgabe P6 (Minimalpolynome und Inverse).
Seien $\varphi_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k)$ gegeben durch $\varphi_i = \tilde{A}_i$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bereits bekannt ist:

$$\chi_{A_1} = t^3, \quad \chi_{A_2} = (t-2)(t-1)(t+1).$$

(a) Lösen Sie die folgenden Aufgaben für $i = 1, 2, 3, 4$:

(i) Ermitteln Sie das Minimalpolynom μ_{φ_i}.
Nutzen Sie bei A_4 ohne Beweis: Ist $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, so gilt stets auch $\chi_\varphi | \mu_\varphi^{dim(V)}$.

(ii) Ist φ_i diagonalisierbar?

(iii) Ist φ_i bijektiv? Geben Sie dann ein Polynom $p \in \mathbb{R}[t]$ mit $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(\mu_{\varphi_i}) - 1$ an mit $\varphi_i^{-1} = p(\varphi_i)$.

(b) Geben Sie jeweils eine Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ an, welche die angegebenen Minimal- und charakteristischen Polynome aus $\mathbb{R}[t]$ besitzt.

(i) $\chi_A = t^3$ und $\mu_A \in \{t, t^2, t^3\}$.

(ii) $\chi_A = (t-1)^2(t-3)$ und $\mu_A \in \{(t-1)(t-3), (t-1)^2(t-3)\}$.

Aufgabe P7 (Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen zwischen Polynomräumen).
Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $K[t]_{\leq n} := \{p \in K[t] : \mathrm{grad}(g) \leq n\}$ ist zusammen mit der in der Vorlesung definierten Addition und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot p := \sum_{j=0}^{n} (\lambda \cdot a_j) t^j, \qquad p = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \in K[t], \qquad \lambda \in K$$

ein K-Vektorraum. Eine Basis ist gegeben durch die so genannte *Monombasis* $\mathcal{B} = (1, t, ..., t^n)$. Im Folgenden betrachten wir die linearen Abbildungen

$$\varphi_1 : K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}, \qquad \sum_{j=0}^{2} a_j t^j \mapsto \sum_{j=1}^{2} j a_j t^{j-1} \quad (\text{ formale Ableitung }),$$
$$\varphi_2 : K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}, \qquad f \mapsto f(0) + \big[f(1) - f(-1)\big]t + \big[f(1) + f(-1)\big]t^2.$$

Sei nun $K = \mathbb{Q}$.

(a) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_i)$, $i = 1, 2$.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_{φ_i}, $i = 1, 2$.

(c) Berechnen Sie das Minimalpolynom μ_{φ_i}, $i = 1, 2$.

(d) Entscheiden Sie auf Basis von (c), ob φ_i diagonalisierbar ist.
Geben Sie gegebenenfalls eine Basis $\mathcal{B}'$ aus Eigenvektoren an, so dass $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi_i)$ diagonal ist.

(e) Entscheiden Sie auf Basis von (b), ob φ_i bijektiv ist. Geben Sie in diesem Falle ein Polynom $p \in K[t]$ mit $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(\mu_{\varphi_i}) - 1$ und $\varphi_i^{-1} = p(\varphi_i)$ an und berechnen Sie damit φ_i^{-1}.

Aufgabe P8 (Minimalpolynome und Eigenwerte von Endomorphismen).
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$.

(a) Zeigen Sie: Ist f bijektiv, so gibt es ein Polynom $p \in K[t]$ mit $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(\mu_f) - 1$, so dass $f^{-1} = p(f)$.

(b) Zeigen Sie: Gibt es $v \in V$ und $r \in \mathbb{N}$, so dass $v, f(v), ..., f(v)^{r-1}$ linear unabhängig sind, so gilt $\mathrm{grad}(\mu_f) \geq r$.

(c) Sei $f^2 = \mathrm{id}_V$ mit $f \neq \mathrm{id}_V$, $f \neq -\mathrm{id}_V$. Geben Sie das Minimalpolynom von f an und zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

(d) (i) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda \in K$ und gilt $g(v) \neq 0$, dann ist $g(v)$ ein Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.

(ii) Ist V endlichdimensional, so haben $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Eigenwerte.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`