UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

1. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P1 (Diagonalisierbarkeit von Matrizen).
Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in $M(3 \times 3, K)$ über dem Körper $K = \mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie für die Matrix A_k jeweils das charakteristische Polynom χ_{A_k}, und berechnen Sie die Eigenwerte λ von A_k in K und deren algebraische Vielfachheiten $\mu_{alg}(A, \lambda)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

(b) Entscheiden Sie nur auf Basis der Ergebnisse aus (a) (sofern dies möglich ist), ob A_k über K diagonalisierbar ist.

Wir betrachten nun nur noch die Matrizen A_k, für welche in (b) nicht entschieden werden konnte, ob sie diagonalisierbar über K sind.

(c) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten λ gehörigen Eigenräume $\mathrm{Eig}(A_k, \lambda)$ von A_k und geben Sie die geometrische Vielfachheiten $\mu_{geo}(A_k, \lambda)$ an.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung benutzen, dass $Eig(A_1, 1) = Lin((1, 0, 0)^t)$ *und* $Eig(A_2, 0) = Lin((-1, 0, 1)^t)$.

(d) Entscheiden Sie für A_k nur mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) und (c), ob diese über K diagonalisierbar sind.

(e) Geben Sie eine Basis von K^3 aus Eigenvektoren von A_2 an, sowie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, K)$, so dass $T^{-1}A_2T = D$.

Sei nun $K = \mathbb{R}$.

(f) Wiederholen Sie (a),(b) für die Matrix A_4 und geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, K)$ an, so dass $T^{-1}A_4T = D$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung benutzen, dass $Eig(A_4, 2) = Lin((-1, 0, 1)^t)$ *und* $Eig(A_4, 2 - \sqrt{2}) = Lin((1, -\sqrt{2}, 1)^t)$.

Lösung:

(a) •

$$\begin{aligned}\chi_{A_1}(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A_1) = \det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -5 & -4\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -3 & \lambda-2\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Blockmatrix}}{=} (\lambda-1)\cdot\det\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0\\ -3 & \lambda-2\end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{Q}$ gilt: $\chi_{A_1}(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, 2\}$
$\Rightarrow$ Eigenwerte von A_1 sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, und

$$\mu_{alg}(A_1, 1) = 1, \qquad \mu_{alg}(A_1, 2) = 2.$$

•

$$\begin{aligned}\chi_{A_2}(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A_2) = \det\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda-1)^2(\lambda-2) - (\lambda-2) = (\lambda-2)\cdot\big[(\lambda-1)^2-1\big] = \lambda(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{Q}$ gilt: $\chi_{A_2}(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0, 2\}$
$\Rightarrow$ Eigenwerte von A_2 sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, und

$$\mu_{alg}(A_2, 0) = 1, \qquad \mu_{alg}(A_2, 2) = 2.$$

•

$$\begin{aligned}\chi_{A_3}(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A_3) = \det\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda-1)^2\lambda - (\lambda-1) - (\lambda-1) = (\lambda-1)\big[\underbrace{(\lambda-1)\lambda-2}_{=\lambda^2-\lambda-2}\big]\\ &\overset{\text{p/q-Formel}}{=} (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{Q}$ gilt: $\chi_{A_3}(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{-1, 1, 2\}$
$\Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ sind die Eigenwerte von A_3 und

$$\mu_{alg}(A_3, -1) = \mu_{alg}(A_3, 1) = \mu_{alg}(A_3, 2) = 1.$$

•

$$\begin{aligned}\chi_{A_4}(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A_4) = \det\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda-2)^3 - (\lambda-2) - (\lambda-2)\\ &= (\lambda-2)\big[(\lambda-2)^2-2\big].\end{aligned}$$

Die Gleichung $(\lambda-2)^2-2 = 0$ hat keine Lösungen in $\mathbb{Q}$ (Lösungen laut p/q-Formel: $\lambda_{2/3} = 2\pm\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ - formaler Beweis ist mittels typischem $\sqrt{2}$-ist-irrational-Beweis möglich, wird hier aber nicht verlangt).
$\Rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{Q}$ gilt: $\chi_{A_4}(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2$
$\Rightarrow$ Nur $\lambda_1 = 2$ ist Eigenwert von A_4 und $\mu_{alg}(A_4, 2) = 1$.

(b) Anhand der Sätze aus der Vorlesung kann Diagonalisierbarkeit anhand des charakteristischen Polynoms χ_{A_k} nur wie folgt geprüft werden (vgl. (15.22)):

- (15.22)(a) χ_{A_k} zerfällt über K in Linearfaktoren und die Vielfachheit aller Nullstellen ist $1 \Rightarrow A_k$ ist diagonalisierbar.
- (15.22)(b) χ_{A_k} zerfällt über K *nicht* in Linearfaktoren $\Rightarrow A_k$ ist *nicht* diagonalisierbar.

Wir prüfen, ob eine der beiden Möglichkeiten vorliegt. Falls nicht, ist noch keine Aussage über die Diagonalisierbarkeit möglich.

- χ_{A_1} zerfällt über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren, aber $\mu_{alg}(A_1, 2) = 2 > 1 \Rightarrow$ noch keine Aussage möglich.
- χ_{A_2} zerfällt über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren, aber $\mu_{alg}(A_2, 2) = 2 > 1 \Rightarrow$ noch keine Aussage möglich.
- χ_{A_3} zerfällt über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren, und die Vielfachheit aller Nullstellen ist 1 $\overset{(15.22)(b)}{\Rightarrow} A_3$ diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.
- χ_{A_4} zerfällt über $\mathbb{Q}$ nicht in Linearfaktoren $\overset{(15.22)(a)}{\Rightarrow} A_4$ nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.

(c) Gemäß Aufgabenstellung betrachten wir nur noch A_1, A_2.

- Hinweis $\Rightarrow \mathrm{Eig}(A_1, 1) = \mathrm{Lin}(v_1)$ mit $v_1 := (1, 0, 0)^t$.
  Es bleibt $\mathrm{Eig}(A_1, 2) = \mathrm{Kern}(2E_3 - A_1)$ zu berechnen:
  $$2E_3 - A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  (-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A_1, 2) = \mathrm{Kern}(2E_3 - A_1)$ ist $v_2 = (4, 0, 1)^t$.
  Damit ist
  $$\mu_{geo}(A_1, 1) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A_1, 1) = 1, \quad \mu_{geo}(A_1, 2) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A_1, 2) = 1.$$
- Hinweis $\Rightarrow \mathrm{Eig}(A_2, 0) = \mathrm{Lin}(v_1)$ mit $v_1 = (-1, 0, 1)^t$.
  Es bleibt $\mathrm{Eig}(A_2, 2) = \mathrm{Kern}(2E_3 - A_2)$ zu berechnen:
  $$2E_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  (-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A_2, 2) = \mathrm{Kern}(2E_3 - A_2)$ ist (v_2, v_3) mit $v_2 = (0, 1, 0)^t$, $v_3 = (1, 0, 1)^t$.
  Damit ist
  $$\mu_{geo}(A_2, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A_2, 0) = 1, \quad \mu_{geo}(A_2, 2) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A_2, 2) = 2.$$

(d)
- Für A_1 gilt:
  $$\mu_{geo}(A_1, 2) = 1 \neq 2 = \mu_{alg}(A_1, 2).$$
  $\overset{(15.24)}{\Rightarrow} A_1$ ist nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.

- Für A_2 gilt:

$$\mu_{geo}(A_2,0) = 1 = \mu_{alg}(A_2,0), \qquad \mu_{geo}(A_2,2) = 2 = \mu_{alg}(A_2,2),$$

  d.h. für alle Eigenwerte stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.
  Außerdem zerfällt χ_{A_2} über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren (vgl. (a))
  $\overset{(15.24)}{\Rightarrow}$ A_2 ist diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.

(e) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig $\Rightarrow$ (v_1, v_2, v_3) ist Basis von $\mathbb{Q}^3$ aus Eigenvektoren von A_2.
(15.3) $\Rightarrow$

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(f) Aus (a): $\chi_{A_4}(\lambda) \overset{(a)}{=} \lambda((\lambda-2)^2-2)$.
p/q-Formel: Nullstellen von $(\lambda-2)^2 - 2$ *sind* $\lambda_{2/3} = 2 \pm \sqrt{2}$.
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt also $\chi_{A_4}(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\lambda \in \{2, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$.
$\Rightarrow$ Eigenwerte von A_4 über $\mathbb{R}$ sind

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2-\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 2+\sqrt{2}.$$

χ_{A_4} zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$ und die Vielfachheit aller Nullstellen ist 1
$\overset{(15.22)(b)}{\Rightarrow}$ A_4 diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

Hinweis $\Rightarrow$

$$\mathrm{Eig}(A_4, 2) = \mathrm{Lin}(\underbrace{(-1,0,1)^t}_{=:v_1}), \quad \mathrm{Eig}(A_4, 2-\sqrt{2}) = \mathrm{Lin}(\underbrace{(1,-\sqrt{2},1)^t}_{=:v_2}).$$

Es bleibt $\mathrm{Eig}(A_4, 2+\sqrt{2}) = \mathrm{Kern}((2+\sqrt{2})E_3 - A_4)$ zu berechnen:

$$(2+\sqrt{2})E_3 - A_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\sqrt{2}\cdot Z1 + Z2 \to Z2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A_4, 2+\sqrt{2}) = \mathrm{Kern}((2+\sqrt{2})E_3 - A_4)$ ist $v_3 = (1, \sqrt{2}, 1)^t$.

(15.3) $\Rightarrow$

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

erfüllen $T^{-1} A_4 T = D$.

Aufgabe P2 (Anwendung: Diagonalisierbarkeit bei linearen Rekursionen).
Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in einem Körper K seien gegeben durch $a_1, b_1 \in K$ und die Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $A \in M(2 \times 2, K)$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

Ist A diagonalisierbar, so gibt es $S \in \mathrm{GL}(2, K)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $SAS^{-1} = D$, wobei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A^n = S^{-1}D^nS$ und $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$.

Es sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $a_1 = b_1 = 1$.

(c) Ermitteln Sie mit Hilfe von (a),(b) eine nicht-rekursive Formel für b_n ohne Matrizenmultiplikationen.

Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ und $a_1 = b_1 = 1$.

(d) Ermitteln Sie mit Hilfe von (a),(b) eine nicht-rekursive Formel für b_n ohne Matrizenmultiplikationen.

Lösung:

(a) Kurz: Aufgrund der Rekursionsgleichung gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{(n-1)\text{-mal}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

(Mathematisch „sauberer“ mit vollständiger Induktion)

(b) Aus $SAS^{-1} = D$ folgt $A = S^{-1}DS$, daher

$$\begin{aligned} A^n &= (S^{-1}D\underbrace{S) \cdot (S^{-1}}_{=E_2}D\underbrace{S) \cdot (S^{-1}}_{=E_2}DS) \cdot \ldots \cdot (S^{-1}DS) \\ &= S^{-1}\underbrace{D \cdot \ldots \cdot D}_{n\text{-mal}}S = S^{-1}D^nS. \end{aligned}$$

Weiter ist $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, und

$$D^n = \overbrace{D \cdot \ldots \cdot \underbrace{D \cdot \underbrace{D \cdot D}_{=\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}}}_{=\begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{pmatrix}}}^{n\text{-mal}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

(Mathematisch „sauberer“ mit vollständiger Induktion)

(c) Ziel zunächst: Diagonalisiere A.
Hier ist $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 3^2 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$.
Nullstellen von χ_A: $\chi_A(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\lambda \in \{-2, 4\}$.
Damit sind $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ die Eigenwerte von A. Berechnung der Eigenräume:

- $\mathrm{Eig}(A,\lambda_1) = \mathrm{Kern}(\lambda_1 E_2 - A)$:

$$\lambda_1 E_2 - A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(\lambda_1 E_2 - A)$ ist damit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Eig}(A,\lambda_2) = \mathrm{Kern}(\lambda_2 E_2 - A)$:

$$\lambda_2 E_2 - A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(\lambda_2 E_2 - A)$ ist damit $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow A = SDS^{-1}$ mit $S^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnung S: Es gilt $S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a),(b) $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = S^{-1} D^{n-1} S \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{=\begin{pmatrix} 0 \\ 4^{n-1} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4^{n-1} \\ 4^{n-1} \end{pmatrix},$$

d.h. $a_n = b_n = 4^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) Ziel zunächst: Diagonalisiere A.
Hier ist $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$.
Nullstellen von χ_A: Es gilt $\chi_A(\lambda) = 0$ genau dann, wenn (nutze p/q-Formel) $\lambda \in \{1 + \sqrt{-1}, 1 - \sqrt{-1}\}$).
$\sqrt{-1} = i \Rightarrow$ Damit sind $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$ die Eigenwerte von A. Berechnung der Eigenräume:

- $\mathrm{Eig}(A,\lambda_1) = \mathrm{Kern}(\lambda_1 E_2 - A)$:

$$\lambda_1 E_2 - A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(\lambda_1 E_2 - A)$ ist damit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Eig}(A,\lambda_2) = \mathrm{Kern}(\lambda_2 E_2 - A)$:

$$\lambda_2 E_2 - A = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(\lambda_2 E_2 - A)$ ist damit $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow A = SDS^{-1}$ mit $S^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$.

Berechnung S: Es gilt $S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

(a),(b) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= S^{-1}D^{n-1}S\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} (1+i)^{n-1} & 0 \\ 0 & (1-i)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}}}_{=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-i)(1+i)^{n-1} \\ (1+i)(1-i)^{n-1} \end{pmatrix}} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-i)(1+i)^{n-1} + (1+i)(1-i)^{n-1} \\ i(1-i)(1+i)^{n-1} - i(1+i)(1-i)^{n-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d.h. (wegen $i(1-i) = (1+i)$, $-i(1+i) = 1-i$):

$$b_n = \frac{1}{2}\big[(1+i)^n + (1-i)^n\big], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe P3 (Regeln für Eigenwerte von Endomorphismen).

Es sei V ein K-Vektorraum und $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$. Es sei $v \in V, v \neq 0$ ein Eigenvektor von φ bzw. ψ zum Eigenwert $\lambda \in K$ bzw. $\mu \in K$. Zeigen Sie:

(a) Ist φ bijektiv, so ist v ein Eigenvektor von φ^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(b) Sind $\alpha, \beta \in K$, so ist v Eigenvektor von $\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi$ zum Eigenwert $\alpha\lambda + \beta\mu$.

Lösung:

Voraussetzung $\Rightarrow \varphi(v) = \lambda v$, $\psi(v) = \mu v$. (*)

(a) φ bijektiv $\Rightarrow$ Umkehrabbildung φ^{-1} existiert. φ bijektiv $\overset{P4(a)}{\Rightarrow} \lambda \neq 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
(*) \Rightarrow \varphi(v) = \lambda v \quad &\Longrightarrow \quad \varphi^{-1}(\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda v) \\
&\overset{\varphi^{-1}\text{ linear}}{\Longrightarrow} \quad v = \lambda\varphi^{-1}(v) \\
&\overset{\lambda\neq 0}{\Longrightarrow} \quad \lambda^{-1}v = \varphi^{-1}(v),
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ v ist Eigenvektor von φ^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(b) Es gilt

$$(\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi)(v) = \alpha \cdot \varphi(v) + \beta \cdot \psi(v) \overset{(*)}{=} \alpha \cdot (\lambda v) + \beta \cdot (\mu v) = (\alpha\lambda + \beta\mu)v$$

$\Longrightarrow$ v ist Eigenvektor von $\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi$ zum Eigenwert $\alpha\lambda + \beta\mu$.

Aufgabe P4 (Regeln für Eigenwerte von Endomorphismen 2).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Eig}(\varphi, 0)$. Falls $\dim_K(V) < \infty$, so ist

$$\varphi \text{ bijektiv} \iff 0 \text{ ist kein Eigenwert von } \varphi$$

(b) Gilt $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$, so kann φ nur die Eigenwerte $-1, 1$ besitzen.

(c) Falls $\dim_K(V) < \infty$, so gilt

$$\varphi \text{ diagonalisierbar} \iff \varphi + \mathrm{id}_V \text{ diagonalisierbar}$$

Lösung:

(a) Es gilt $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{v \in V : \varphi(v) = 0\} = \{v \in V : \varphi(v) = 0 \cdot v\} = \mathrm{Eig}(\varphi, 0)$.
Da $\varphi : V \to V$ linear, gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ bijektiv} &\overset{\dim_K(V)<\infty}{\iff} \varphi \text{ injektiv} \\
&\iff \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\} \\
&\overset{\mathrm{Kern}(\varphi)=\mathrm{Eig}(\varphi,0)}{\iff} \mathrm{Eig}(\varphi, 0) = \{0\}. \\
&\iff 0 \text{ ist kein Eigenwert von } \varphi.
\end{aligned}$$

(b) Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ.
$\Rightarrow$ Es gibt $v \in V$, $v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v$ (Eigenvektor). $\Rightarrow$

$$v \overset{\varphi^2=\mathrm{id}_V}{=} \phi^2(v) = \phi(\phi(v)) = \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v) = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v.$$

$\Rightarrow (1 - \lambda^2)v = 0 \overset{v\neq 0}{\Rightarrow} (1 - \lambda)(1 + \lambda) = 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{-1, +1\}$.

(c) „$\Rightarrow$“:
φ diagonalisierbar $\Rightarrow$ es gibt Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ von V aus Eigenvektoren.
$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = D$ mit Diagonalmatrix D.
$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi + \mathrm{id}_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = D + E_n$ ist ebenfalls Diagonalmatrix zur gleichen Basis $\mathcal{B}$.
$\Rightarrow \varphi + \mathrm{id}_V$ diagonalisierbar.
„$\Leftarrow$“: Analog.

Aufgabe P5 (Eigenwerte der Ableitungsabbildung).

Die Menge $V := C^\infty(\mathbb{R})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V, \quad f \mapsto f'$$

der Ableitung. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f_\lambda \in V, x \mapsto \exp(\lambda \cdot x)$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ ist.

Lösung:

Analysis $\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'_\lambda(x) = \lambda \cdot \exp(\lambda \cdot x)$
$\Rightarrow f'_\lambda = \lambda \cdot f_\lambda$.
Ferner ist auch $f_\lambda \neq 0$ (0 bezeichnet hier die Nullfunktion, d.h. den Nullvektor in $C^\infty(\mathbb{R})$), da zum Beispiel $f_\lambda(0) = 1 \neq 0$.
$\Rightarrow$

$$\varphi(f_\lambda) = \lambda \cdot f_\lambda.$$

$\Longrightarrow$ f_λ ist Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`