UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

1. Präsenzblatt

Aufgabe P1 (Diagonalisierbarkeit von Matrizen).

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in $M(3 \times 3, K)$ über dem Körper $K = \mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie für die Matrix A_k jeweils das charakteristische Polynom χ_{A_k}, und berechnen Sie die Eigenwerte λ von A_k in K und deren algebraische Vielfachheiten $\mu_{alg}(A, \lambda)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

(b) Entscheiden Sie nur auf Basis der Ergebnisse aus (a) (sofern dies möglich ist), ob A_k über K diagonalisierbar ist.

Wir betrachten nun nur noch die Matrizen A_k, für welche in (b) nicht entschieden werden konnte, ob sie diagonalisierbar über K sind.

(c) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten λ gehörigen Eigenräume $\mathrm{Eig}(A_k, \lambda)$ von A_k und geben Sie die geometrische Vielfachheiten $\mu_{geo}(A_k, \lambda)$ an.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung benutzen, dass $Eig(A_1, 1) = Lin((1, 0, 0)^t)$ *und* $Eig(A_2, 0) = Lin((-1, 0, 1)^t)$.

(d) Entscheiden Sie für A_k nur mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) und (c), ob diese über K diagonalisierbar sind.

(e) Geben Sie eine Basis von K^3 aus Eigenvektoren von A_2 an, sowie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, K)$, so dass $T^{-1} A_2 T = D$.

Sei nun $K = \mathbb{R}$.

(f) Wiederholen Sie (a),(b) für die Matrix A_4 und geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, K)$ an, so dass $T^{-1} A_4 T = D$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung benutzen, dass $Eig(A_4, 2) = Lin((-1, 0, 1)^t)$ *und* $Eig(A_4, 2 - \sqrt{2}) = Lin((1, -\sqrt{2}, 1)^t)$.

Aufgabe P2 (Anwendung: Diagonalisierbarkeit bei linearen Rekursionen).

Zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in einem Körper K seien gegeben durch $a_1, b_1 \in K$ und die Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $A \in M(2 \times 2, K)$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left(\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \end{smallmatrix}\right) = A^{n-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ b_1 \end{smallmatrix}\right)$.

Ist A diagonalisierbar, so gibt es $S \in \mathrm{GL}(2, K)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $SAS^{-1} = D$, wobei $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A^n = S^{-1} D^n S$ und $D^n = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{smallmatrix}\right)$.

Es sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $a_1 = b_1 = 1$.

(c) Ermitteln Sie mit Hilfe von (a),(b) eine nicht-rekursive Formel für b_n ohne Matrizenmultiplikationen.

Sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ und $a_1 = b_1 = 1$.

(d) Ermitteln Sie mit Hilfe von (a),(b) eine nicht-rekursive Formel für b_n ohne Matrizenmultiplikationen.

Aufgabe P3 (Regeln für Eigenwerte von Endomorphismen).

Es sei V ein K-Vektorraum und $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$. Es sei $v \in V, v \neq 0$ ein Eigenvektor von φ bzw. ψ zum Eigenwert $\lambda \in K$ bzw. $\mu \in K$. Zeigen Sie:

(a) Ist φ bijektiv, so ist v ein Eigenvektor von φ^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(b) Sind $\alpha, \beta \in K$, so ist v Eigenvektor von $\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi$ zum Eigenwert $\alpha\lambda + \beta\mu$.

Aufgabe P4 (Regeln für Eigenwerte von Endomorphismen 2).
Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Eig}(\varphi, 0)$. Falls $\dim_K(V) < \infty$, so ist

$$\varphi \text{ bijektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \text{ ist kein Eigenwert von } \varphi$$

(b) Gilt $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$, so kann φ nur die Eigenwerte $-1, 1$ besitzen.

(c) Falls $\dim_K(V) < \infty$, so gilt

$$\varphi \text{ diagonalisierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi + \mathrm{id}_V \text{ diagonalisierbar}$$

Aufgabe P5 (Eigenwerte der Ableitungsabbildung).
Die Menge $V := C^\infty(\mathbb{R})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V, \quad f \mapsto f'$$

der Ableitung. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f_\lambda \in V, x \mapsto \exp(\lambda \cdot x)$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ ist.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`