UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

0. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P0.1 (Polynomdivision).

Sei K ein Körper, $f, g \in K[t]$, $g \neq 0$.

(a) Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Es gibt eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$, so dass

$$f = q \cdot g + r \quad \text{mit} \quad \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g).$$

Hinweis: Beweisen Sie per vollständiger Induktion nach $n := \operatorname{grad}(f)$ *die Existenz von* $q, r \in K[t]$.

(b) Gegeben seien die Polynome $f_1, f_2 \in K[t]$ mit

(i) $f_1 = t^2 + 2$,

(ii) $f_2 = t^3 + 2t^2 + 2t + 1$.

Bestimmen Sie für $K \in \{F_3, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ die Nullstellen des Polynoms $f_i \in K[t]$ $(i = 1, 2)$ und überprüfen Sie, ob f_i über dem jeweiligen Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Lösung:

(a)
- Es sei $g \in K[t]$ fest vorgegeben.
  Wir zeigen die Aussage

$$\begin{aligned} A(n) \;\; := \;\; &\text{"Ist } f \in K[t] \text{ mit } \operatorname{grad}(f) \leq n, \text{ dann gibt es } q, r \in K[t] \\ &\text{mit } f = q \cdot g + r \text{ und } \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)\text{"} \end{aligned}$$

  per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt die *Existenz* für beliebiges $f \in K[t]$.
  - IA: Es gilt $A(\operatorname{grad}(g) - 1)$, denn: Für $f \in K[t]$ mit $\operatorname{grad}(f) < \operatorname{grad}(g) - 1$ wähle $q := 0$, $r := f$.
  - IV: Es gelte $A(n)$ für beliebiges $n \geq \operatorname{grad}(g) - 1$.
  - IS: Für $f \in K[t]$ mit $\operatorname{grad}(f) \leq n + 1$ setze

$$f_{neu} := f - \frac{l(f)}{l(g)} \cdot g \cdot t^{\operatorname{grad}(f) - \operatorname{grad}(g)}.$$

    Dann gilt:

$$\operatorname{grad}(f_{neu}) \leq n.$$

    (das größte Monom in f wird in f_{neu} eliminiert - kann durch Darstellung $f = \sum_{k=0}^{n+1} a_k t^k$, $g = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$ eingesehen werden).
    IV $\implies$ Es gibt $q_{neu}, r_{neu} \in K[t]$ mit

$$f - \frac{l(f)}{l(g)} \cdot g \cdot t^{\operatorname{grad}(f) - \operatorname{grad}(g)} = f_{neu} = q_{neu} \cdot g + r_{neu}, \qquad \operatorname{grad}(r_{neu}) < \operatorname{grad}(g).$$

$\Longrightarrow$

$$f = \Big(\frac{l(f)}{l(g)} \cdot t^{\mathrm{grad}(f)-\mathrm{grad}(g)} + q_{neu}\Big) \cdot g + r_{neu}, \quad \mathrm{grad}(r_{neu}) < \mathrm{grad}(g).$$

Das heißt, es gilt $A(n+1)$.

- Wir zeigen die Eindeutigkeit: Seien $q_1, q_2, r_1, r_2 \in K[t]$, so dass $f = q_1 \cdot g + r_1 = q_2 \cdot g + r_2$ mit $\mathrm{grad}(r_1) < \mathrm{grad}(g)$ und $\mathrm{grad}(r_2) < \mathrm{grad}(g)$.

  Wir wollen zeigen, dass $q_1 = q_2$ und $r_1 = r_2$ gilt.

  $$f = q_1 \cdot g + r_1 = q_2 \cdot g + r_2 \qquad \Longrightarrow \qquad r_2 - r_1 = (q_1 - q_2)g \quad (*)$$

  Es folgt mit (14.3):

  $$\mathrm{grad}(q_1 - q_2) + \mathrm{grad}(g) = \mathrm{grad}(r_2 - r_1) \leq \max\{\mathrm{grad}(r_1), \mathrm{grad}(r_2)\} < \mathrm{grad}(g).$$

  $\Longrightarrow$ $\mathrm{grad}(q_1 - q_2) < 0$.
  $\Longrightarrow$ $q_1 - q_2 = 0$ (Nullpolynom).
  $\Longrightarrow$ $q_1 = q_2$.
  $(*)$ $\Longrightarrow$ $r_2 - r_1 = \underbrace{(q_2 - q_1)}_{=0} \cdot g = 0$ (Nullpolynom).
  $\Longrightarrow$ $r_2 = r_1$.

(b) (i)
- Es ist $F_3 = \{0, 1, 2\}$.
  Dann gilt $\tilde{f}_1(0) = 0^2 + 2 = 2$, $\tilde{f}_1(1) = 1^2 + 2 = 0$, $\tilde{f}_1(2) = 2^2 + 2 = 0$.
  $\Longrightarrow$ f hat zwei Nullstellen $t_1 = 1$ und $t_2 = 2$. $\Longrightarrow$ $f_1 = (t-1)(t-2)$, womit f_1 über F_3 vollständig in Linearfaktoren zerfällt.
- In $\mathbb{R}$: *Ansatz p-q-Formel liefert $t_{1/2} = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$ keine reellen Nullstellen $\Rightarrow$ Zeige, dass f_1 keine reellen Nullstellen besitzt:*

  f_1 besitzt keine Nullstelle, da $\tilde{f}(t) = t^2 + 2 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- In $\mathbb{C}$: *Ansatz: p-q-Formel liefert $t_{1/2} = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$.*

  Man sieht leicht, dass in $\mathbb{C}[t]$ gilt: $f_1 = (t + i\sqrt{2})(t - i\sqrt{2})$, d. h. f_1 hat die Nullstellen $z_1 = -i\sqrt{2}$ und $z_2 = i\sqrt{2}$ und zerfällt über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren (wie auch durch den Fundamentalsatz der Algebra zu erwarten war).

(ii)
- In $F_3 = \{0, 1, 2\}$:
  Dann gilt $\tilde{f}_2(0) = 1$, $\tilde{f}_2(1) = 1 + 2 + 2 + 1 = 0$, $\tilde{f}_2(2) = 2 + 2 + 1 + 1 = 0$.
  $\Longrightarrow$ f_2 hat zwei Nullstellen $t_1 = 1$ und $t_2 = 2$.
  Mit der Nullstelle $t_2 = 2$ vermuten wir $(t+1)$ als Linearfaktor von f_2.
  Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ t^3 + 2t^2 + 2t + 1\big) : \big(t+1\big) = t^2 + t + 1 \\
\underline{-\,t^3 \ \ -t^2} \\
\qquad\quad t^2 + 2t \\
\qquad \underline{-\,t^2 \ \ -t} \\
\qquad\qquad\quad t + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-\,t - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

$\implies f_2 = (t+1)(t^2+t+1)$ in $F_3[t]$.
Wir stellen weiter fest, dass $t_1 = 1$ eine Nullstelle des Polynoms $g := t^2+t+1$ ist, und vermuten, dass $(t+2)$ ein Linearfaktor von f_2 bzw. g ist. Polynomdivision liefert: $(t^2+2t+1) : (t+2) = (t+2)$, d.h. $g = (t+2)(t+2)$.
$\implies f_2 = (t+1)(t+2)^2$ zerfällt über F_3 in Linearfaktoren.

- Durch Einsetzen einfacher Zahlen bzw. motiviert durch die Rechnung in F_3 vermuten wir, dass $t_1 = -1$ eine Nullstelle von f_2 über $\mathbb{R}$ ist.
  Tatsächlich gilt $\tilde{f}_2(-1) = 0$.
  Polynomdivision $\implies f_2 = (t+1)(t^2+t+1)$. (*)

  (*Ansatz: p-q-Formel liefert nur komplexe Nullstellen; zeige also dass* $g := t^2+t+1$ *keine reellen Nullstellen besitzt*).

  $g := t^2+t+1$ besitzt keine weiteren Nullstellen in $\mathbb{R}$, denn
  $$g = (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$
  für alle $t \in \mathbb{R}$.
  $\implies$ Über $\mathbb{R}$ zerfällt das Polynom $f_2 = (x+1)(x^2+x+1)$ nicht vollständig in Linearfaktoren und besitzt nur die eine Nullstelle $t_1 = -1$.
- In $\mathbb{C}$: Wir übernehmen die Argumentation aus dem Fall $K = \mathbb{R}$ bis (*).

  Ansatz: p-q-Formel liefert $t_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

  Man sieht leicht, dass in $\mathbb{C}[t]$ gilt: $g = (t-t_2)(t-t_3)$, d. h. f_2 hat die Nullstellen t_2 und t_3.
  $\implies$ Es gilt $f_2 = (t+1)g = (t+1)(t-t_2)(t-t_3)$, d.h. f_2 zerfällt über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren (wie auch durch den Fundamentalsatz der Algebra zu erwarten war) und hat die Nullstellen $-1, t_2, t_3$.

Aufgabe P0.2 (Komplexe Zahlen).
Wir betrachten die in der Vorlesung definierte Menge $\mathbb{C} := \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei $i := \sqrt{-1}$ mit den Verknüpfungen

$$(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i \quad \text{und} \quad (a+bi)\cdot(c+di) := (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Fokussieren Sie sich hierbei auf folgende Punkte:

  (i) Geben Sie das neutrale bzw. inverse Element bzgl. der Addition an.

  (ii) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist und geben Sie insbesondere das neutrale und inverse Element an.

  (iii) Weisen Sie eines der Distributivgesetze nach.

Es kann gezeigt werden, dass $z = a+bi \in \mathbb{C}$ mit dem Element $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ identifiziert werden kann (dies motiviert den Begriff der „komplexen Ebene“). Seien $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ und $z_2 = \sqrt{3} - i$ gegeben.

(b) Zeichnen Sie z_1, z_2 in die komplexe Ebene ein und veranschaulichen Sie anhand von $z_1 + z_2$ die Addition von komplexen Zahlen.

(c) Schreiben Sie $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2, z_2 \cdot z_2, \frac{1}{z_1}, \frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + bi \in \mathbb{C}$.

Lösung:

(a) (i) Seien im folgenden $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $y = c + di \in \mathbb{C}$, $x := e + fi$.

- Das neutrale Element ist $0_\mathbb{C} := 0_\mathbb{R} + 0_\mathbb{R} i \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$z + 0_\mathbb{C} = (a + bi) + (0_\mathbb{R} + 0_\mathbb{R} i) = (a + 0_\mathbb{R}) + (b + 0_\mathbb{R})i = a + bi = z.$$

  Analog folgt $0_\mathbb{C} + z = z$.

- Das inverse Element zu $z \in \mathbb{C}$ ist $-z = -a - bi \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$z + (-z) = (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0_\mathbb{C}.$$

  Analog folgt $(-z) + z = 0_\mathbb{C}$.

(ii) Wir weisen die Gruppenaxiome nach.

- **Kommutativität**: $z \cdot y = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (cb + da)i = y \cdot z$.
- **Assoziativität**:

$$\begin{aligned}
(z \cdot y) \cdot x &= ((ac - bd) + (ad + bc)i) \cdot (e + fi) \\
&= ((ac - db)e - (ad + bc)f) + ((ac - bd)f + (ad + bc)e)i \\
&= (a(ce - df) - b(cf + de)) + (a(cf + de) + b(ce - df))i \\
&= (a + bi) \cdot ((ce - df) + (cf + de)i) \\
&= z \cdot (y \cdot x)
\end{aligned}$$

- **Neutrales Element**: Sei $1_\mathbb{C} := 1_\mathbb{R} + 0_\mathbb{R} i \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$z \cdot 1_\mathbb{C} = (a + bi) \cdot (1_\mathbb{R} + 0_\mathbb{R} i) = (a1_\mathbb{R} - b0_\mathbb{R}) + (a0_\mathbb{R} + b1_\mathbb{R})i = a + bi = z.$$

  Analog folgt $1_\mathbb{C} \cdot z = z$.

- **Inverses Element**: Das zu $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ inverse Element ist

$$z^{-1} := \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \in \mathbb{C}.$$

  Es gilt:

$$\begin{aligned}
z \cdot z^{-1} &= (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right) \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{ba}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) i = 1_\mathbb{R} + 0_\mathbb{R} i = 1_\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

  Analog folgt $z^{-1} \cdot z = 1_\mathbb{C}$.

  Für einen Ansatz für die Form von $u + vi = z' = z^{-1}$ ist das Gleichungssystem

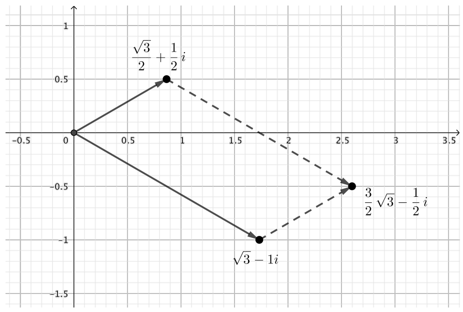
$$1_\mathbb{R} + 0_\mathbb{R} \cdot i = 1_\mathbb{C} = z \cdot z' = (a + bi) \cdot (u + vi) = (au - bv) + (av + bu)i$$

  zu lösen, d.h. es muss $au - bv = 1_\mathbb{R}$ und $av + bu = 0_\mathbb{R}$ gelten.

(iii) Es reicht ein Distributivgesetz nachzuweisen, da die Multiplikation „·“ in $\mathbb{C}$ kommutativ ist:

$$\begin{aligned}
z \cdot (x + y) &= (a + bi) \cdot ((c + di) + (e + fi)) = (a + bi) \cdot ((c + e) + (d + f)i) \\
&= (a(c + e) - b(d + f)) + (a(d + f) + b(c + e))i \\
&= (ac - bd + ae - bf) + (ad + bc + af + be)i \\
&= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ae - bf) + (af + be)i] \\
&= z \cdot y + z \cdot x.
\end{aligned}$$

(b)



z_1, z_2 werden als Vektoren $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ und $(\sqrt{3}, -1)$ in die Ebene $\mathbb{R}^2$ eingezeichnet. Die Summe $z_1 + z_2$ ergibt sich anschaulich durch Addition der beiden Vektoren.

(c)
- $z_1 + z_2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$
- $z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot (-1)) + (\sqrt{3} \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot (-1))i\right] = 2$
- $z_2 \cdot z_2 = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - (-1)(-1)) + (\sqrt{3} \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot (-1))i = 2 - 2i\sqrt{3}$
- $\frac{1}{z_1} \overset{\text{(a)}}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- $\frac{1}{z_2} \overset{\text{(a)}}{=} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ und $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{8}(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i.$

Aufgabe P0.3 (Polarkoordinaten und Veranschaulichung der Multiplikation).
Aus der Schule ist bekannt, dass für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 = 1$ eine eindeutige Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ existiert, so dass $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.

(a) Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine eindeutige Darstellung

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

besitzt, wobei $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Hinweis: Für einen Ansatz stellen Sie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *und ein beliebiges* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *in der komplexen Ebene dar.*
Die Elemente vom Tupel (r, φ) *werden auch als die* Polarkoordinaten *von* z *bezeichnet.*

(b) Stellen Sie die zu den Polarkoordinaten $(2, \frac{3\pi}{4})$ gehörige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene dar. Schreiben Sie z in der Form $a + bi \in \mathbb{C}$.

(c) Sei eine weitere komplexe Zahl gegeben durch $w = s \cdot (\cos\psi + i \sin\psi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$z \cdot w = (r \cdot s) \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme für cos *und* sin.

(d) Veranschaulichen Sie die Multiplikation am Beispiel von z aus (b) und $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, indem Sie auch w mittels Polarkoordinaten darstellen und dann z, w und $z \cdot w$ in die komplexe Ebene einzeichnen.

Lösung:

(a) Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ beliebig.

Anschauung: z entspricht dem Punkt (a, b) in der komplexen Ebene. Dieser liegt auf einem Kreisring mit Radius $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Entsprechend liegt $(\frac{a}{r}, \frac{b}{r})$ auf einem Kreisring mit Radius 1.

Setze $r := \sqrt{a^2 + b^2} > 0$.
$\Rightarrow (\frac{a}{r})^2 + (\frac{b}{r})^2 = 1$.
$\overset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow}$ Es gibt $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\frac{a}{r} = \cos(\varphi)$, $\frac{b}{r} = \sin(\varphi)$.
$\Rightarrow z = a + bi = r \cdot (\frac{a}{r} + \frac{b}{r}i) = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$.

Eindeutigkeit: Seien $r_1, r_2 > 0$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ mit

$$r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) = z = r_2(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)).$$

$\Rightarrow r_1 \cos(\varphi_1) = r_2 \cos(\varphi_2)$ und $r_1 \sin(\varphi_1) = r_2 \sin(\varphi_2)$ (*).
$\Rightarrow r_1^2 \overset{\cos(\phi_1)^2+\sin(\phi_1)^2=1}{=} (r_1 \cos(\varphi_1))^2+(r_1 \sin(\varphi_1))^2 = (r_2 \cos(\varphi_2))^2+(r_2 \sin(\varphi_2))^2 \overset{\cos(\varphi_2)^2+\sin(\varphi_2)^2=1}{=} r_2^2$.
$\overset{r_1,r_2>0}{\Rightarrow} r_1 = r_2$.
(*) $\Rightarrow (\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1)) = (\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2))$
Anwendung der Eindeutigkeit aus dem Hinweis auf $(x, y) = (\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1))$ (es gilt $\cos(\varphi_1)^2 + \sin(\varphi_1)^2 = 1$) liefert $\varphi_1 = \varphi_2$.

(b) Einsetzen ergibt: $z = 2 \cdot (\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4})) = 2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

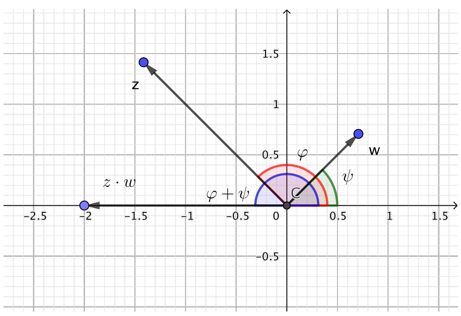
(c) Es ist

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)) \cdot (s \cdot (\cos\psi + i \sin\psi)) \\ &= (r \cos\varphi + ir \sin\varphi) \cdot (s \cos\psi + is \sin\psi) \\ &= (rs(\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi) + irs(\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi)) \\ &\overset{\text{Add.thm.}}{=} (rs)(\cos(\varphi + \psi) + i(\sin(\varphi + \psi))). \end{aligned}$$

(d) w besitzt die Polarkoordinaten $(s, \psi) = (1, \frac{\pi}{4})$, d. h. $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})$.

Herleitung: Aus (a) wissen wir, dass $s = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$. Anschauung Schule: Winkel zu Punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ auf dem Kreis erfüllt $\tan(\psi) = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})}{(\frac{1}{\sqrt{2}})} = 1$, d.h. $\psi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Wir zeichnen z, w in die komplexe Zahlenebene ein. $z \cdot w$ besitzt gemäß (c) die Polarkoordinaten $(r \cdot s, \varphi + \psi)$, d.h. in der komplexen Ebene ergibt sich $z \cdot w$ durch Addition der Winkel und Multiplikation der Radien von z und w.



Formal gilt damit $z \cdot w = -2$.

Aufgabe P0.4 (Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{C}$).
Für eine komplexe Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\overline{z} := a - bi \in \mathbb{C},$$

die so genannte *komplexe Konjugation* von z.

(a) Zeigen Sie, dass für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w},$$

sowie

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom über den reellen Zahlen und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f.

(b) Zeigen Sie, dass auch $\overline{z} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f ist.

Sei nun $g := (t - z)(t - \overline{z}) \in \mathbb{C}[t]$.

(c) Das Polynom g ist ein normiertes Polynom vom Grad 2 ohne reelle Nullstellen.

(d) Es existiert ein $q \in \mathbb{R}[t]$, so dass $f = q \cdot g$.

Lösung:

(a) Seien $z = a + bi \in \mathbb{C}$ und $w = c + di \in \mathbb{C}$ beliebig mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(i) Es gilt $\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \overline{z + w}$,

(ii) $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \overline{z \cdot w}$.

(iii) „$\Rightarrow$“ Gelte $z = \overline{z}$. $\implies a + bi = a - bi \implies bi = -bi \implies b = -b \implies b = 0$.
„$\Leftarrow$“ Gelte $z \in \mathbb{R}$. $\implies b = 0 \implies \overline{z} = a - bi = a - 0i = a + 0i = z$.

(b) Nach Voraussetzung gilt $\tilde{f}(z) = 0$. Wir wollen zeigen: $\tilde{f}(\overline{z}) = 0$.
Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, ..., n)$ mit $f = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k$. Dann folgt

$$\tilde{f}(\overline{z}) = \sum_{k=1}^{n} a_k (\overline{z})^k \overset{(a)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \overline{z^k} \overset{(a), a_k \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z^k} \overset{(a)}{=} \overline{\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot z^k} = \overline{\tilde{f}(z)} = \overline{0} = 0.$$

(c) Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g = (t - z)(t - \overline{z}) = (t - a - bi)(t - a + bi) = t^2 - 2at + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[t].$$

$\overset{\text{ablesen}}{\implies} \operatorname{grad}(f) = 2$, $l(g) = 1$.
Es gilt

$$g = (t - a)^2 + b^2$$

$\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\tilde{g}(x) = (x - a)^2 + b^2 > 0$.
$\implies$ g hat keine reellen Nullstellen.

(d) Durch Polynomdivision in $\mathbb{R}[t]$ (vgl. P0.1(a)) existieren $q, r \in \mathbb{R}[t]$ mit

$$f = q \cdot g + r \quad \text{und} \quad \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g) = 2,$$

d.h. $\operatorname{grad}(r) \leq 1$. Ziel im Folgenden: Zeige, dass r das Nullpolynom ist.

Da z Nullstelle von $f \implies$

$$0 = \tilde{f}(z) = \tilde{q}(z) \underbrace{\tilde{g}(z)}_{=0} + \tilde{r}(z) = \tilde{r}(z)$$

(beachte die konkrete Form von g).
(b) $\implies$ $\overline{z}$ Nullstelle von $f \implies$

$$0 = \tilde{f}(\overline{z}) = \tilde{q}(\overline{z}) \underbrace{\tilde{g}(\overline{z})}_{=0} + \tilde{r}(\overline{z}) = \tilde{r}(\overline{z}).$$

Das heißt: r hat mindestens zwei Nullstellen, da $z \neq \overline{z}$.
$\operatorname{grad}(r) \leq 1$, Korollar (14.8) $\Rightarrow$ r ist das Nullpolynom.
$\implies$ $f = q \cdot g$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in der **Plenarübung** am **25. Mai 2019** (**16:15–17:45 Uhr**) besprochen.
Ort: Hörsaalgebäude Physik, Im Neuenheimer Feld 308, Hörsaal 1

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`