UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

0. Präsenzblatt

Aufgabe P0.1 (Polynomdivision).

Sei K ein Körper, $f, g \in K[t]$, $g \neq 0$.

(a) Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Es gibt eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$, so dass

$$f = q \cdot g + r \quad \text{mit} \quad \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g).$$

Hinweis: Beweisen Sie per vollständiger Induktion nach $n := \operatorname{grad}(f)$ *die Existenz von* $q, r \in K[t]$.

(b) Gegeben seien die Polynome $f_1, f_2 \in K[t]$ mit

(i) $f_1 = t^2 + 2$,

(ii) $f_2 = t^3 + 2t^2 + 2t + 1$.

Bestimmen Sie für $K \in \{F_3, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ die Nullstellen des Polynoms $f_i \in K[t]$ $(i = 1, 2)$ und überprüfen Sie, ob f_i über dem jeweiligen Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe P0.2 (Komplexe Zahlen).

Wir betrachten die in der Vorlesung definierte Menge $\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei $i := \sqrt{-1}$ mit den Verknüpfungen

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i \quad \text{und} \quad (a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Fokussieren Sie sich hierbei auf folgende Punkte:

(i) Geben Sie das neutrale bzw. inverse Element bzgl. der Addition an.

(ii) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist und geben Sie insbesondere das neutrale und inverse Element an.

(iii) Weisen Sie eines der Distributivgesetze nach.

Es kann gezeigt werden, dass $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit dem Element $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ identifiziert werden kann (dies motiviert den Begriff der „komplexen Ebene“). Seien $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ und $z_2 = \sqrt{3} - i$ gegeben.

(b) Zeichnen Sie z_1, z_2 in die komplexe Ebene ein und veranschaulichen Sie anhand von $z_1 + z_2$ die Addition von komplexen Zahlen.

(c) Schreiben Sie $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2, z_2 \cdot z_2, \frac{1}{z_1}, \frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + bi \in \mathbb{C}$.

Aufgabe P0.3 (Polarkoordinaten und Veranschaulichung der Multiplikation).

Aus der Schule ist bekannt, dass für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$ eine eindeutige Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ existiert, so dass $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.

(a) Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine eindeutige Darstellung

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

besitzt, wobei $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Hinweis: Für einen Ansatz stellen Sie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *und ein beliebiges* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *in der komplexen Ebene dar.*
Die Elemente vom Tupel (r, φ) *werden auch als die* Polarkoordinaten *von* z *bezeichnet.*

(b) Stellen Sie die zu den Polarkoordinaten $(2, \frac{3\pi}{4})$ gehörige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene dar. Schreiben Sie z in der Form $a + bi \in \mathbb{C}$.

(c) Sei eine weitere komplexe Zahl gegeben durch $w = s \cdot (\cos \psi + i \sin \psi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$z \cdot w = (r \cdot s) \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme für cos *und* sin.

(d) Veranschaulichen Sie die Multiplikation am Beispiel von z aus (b) und $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$, indem Sie auch w mittels Polarkoordinaten darstellen und dann z, w und $z \cdot w$ in die komplexe Ebene einzeichnen.

Aufgabe P0.4 (Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{C}$).
Für eine komplexe Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\overline{z} := a - bi \in \mathbb{C},$$

die so genannte *komplexe Konjugation* von z.

(a) Zeigen Sie, dass für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w},$$

sowie

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom über den reellen Zahlen und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f.

(b) Zeigen Sie, dass auch $\overline{z} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f ist.

Sei nun $g := (t - z)(t - \overline{z}) \in \mathbb{C}[t]$.

(c) Das Polynom g ist ein normiertes Polynom vom Grad 2 ohne reelle Nullstellen.

(d) Es existiert ein $q \in \mathbb{R}[t]$, so dass $f = q \cdot g$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in der **Plenarübung** am **25. Mai 2019** (**16:15–17:45 Uhr**) besprochen.
Ort: Hörsaalgebäude Physik, Im Neuenheimer Feld 308, Hörsaal 1

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`