Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

11. Abgabeblatt

Aufgabe 41	Aufgabe 42	Aufgabe 43	Aufgabe 44	Aufgabe 45	Aufgabe 46	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 41 (Anwendung des Spektralsatzes auf unitären Räumen, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).

Zusammen mit dem von der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & -1 \\ i & -1 & 2 \end{pmatrix}$ induzierten Skalarprodukt ist $V = \mathbb{C}^3$ ein unitärer Vektorraum. Sei $\mathcal{C} = ((1,0,0)^t, (0,i,0)^t, (0,0,1)^t)$ eine Basis von V und $\tilde{B} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gegeben über

$$B = \begin{pmatrix} i & 2 & i-2 \\ 0 & i-1 & 0 \\ 0 & 2i & -1-i \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

(a) Berechnen Sie ausgehend von $\mathcal{C}$ mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB $\mathcal{B}$ für $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{B}$ in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ eine normale Abbildung ist, aber nicht im unitären Standardraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Ist $\tilde{B}$ unitär oder selbstadjungiert in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$?

(c) Bestimmen Sie eine Basis aus normierten Eigenvektoren von $\tilde{B}$. Ist diese Basis eine ONB in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$?

Aufgabe 42 (Eigenschaften normaler Abbildungen, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

(a) Sei f normal und $f^3 = f^4$. Zeigen Sie: f ist selbstadjungiert und $f^2 = f$.
Hinweis: Übertragen Sie die gegebene Eigenschaft zunächst auf eine Aussage für $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, wobei $\mathcal{B}$ eine ONB aus Eigenvektoren von f ist, und folgern Sie Aussagen für die Eigenwerte von f.

(b) Zeigen Sie:

$$f \text{ ist normal} \iff \exists p \in \mathbb{C}[t] : f^{\mathrm{ad}} = p(f) \text{ und } \mathrm{grad}(p) \leq \dim_{\mathbb{C}}(V) - 1.$$

Hinweis für „$\Rightarrow$“: Übertragen Sie die geforderte Eigenschaft zunächst auf eine Aussage für $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, wobei $\mathcal{B}$ eine ONB aus Eigenvektoren von f ist. Sie erhalten dadurch n Gleichungen, die p erfüllen muss. Konstruieren Sie damit ein geeignetes p.

Aufgabe 43 (Eigenschaften von Idealen, $8 = 1.5 + 1 + 1 + 1.5 + 1 + 2$ Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $I, J \subset R$ Ideale. Zeigen Sie:

(a) $I + J := \{x + y | x \in I, y \in J\}$ ist ein Ideal.

(b) $M := \{x \cdot y : x \in I, y \in J\}$ und $I \cup J$ sind im Allgemeinen keine Ideale.
Hinweis: Für ein Gegenbeispiel für M wählen Sie $R = \mathbb{Z}[t]$ und $I = (2, t)$, $J = (3, t)$.

(c) Falls R ein Hauptidealring ist, so ist M ein Ideal.

(d) $I \cdot J := \{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i | n \in \mathbb{N}, x_i \in I, y_i \in J$ für $i = 1, ..., n\}$ ist ein Ideal.

(e) Es gilt $I \cdot J \subset I \cap J \subset I \subset I + J$.

(f) Die Inklusionen in Teil (c) können für $R = \mathbb{Z}$ alle echt sein.
Hinweis: Sie müssen nicht für alle Inklusionen dasselbe Beispiel nutzen!

Aufgabe 44 (Beispiel für einen nicht-faktoriellen Ring, $7 = 1 + 1 + 1.5 + 1 + 1 + 1.5$ Bonuspunkte).
Diese Aufgabe gibt ein Beispiel für einen Ring, der nicht faktoriell ist. Wir werden sehen, dass die Existenz eines größten gemeinsamen Teilers und die eindeutigen Zerlegung in irreduzible Faktoren hier nicht vorliegt.
Wir betrachten den Unterring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ von $\mathbb{C}$. Es sei $\delta : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{N}_0, a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2$. Zeigen Sie:

(a) Für $f, g \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gilt: $\delta(fg) = \delta(f)\delta(g)$.

(b) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^* = \{-1, +1\}$.

(c) Die Elemente $2, 1 + \sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind irreduzibel, aber nicht prim.
Bemerkung: Analoge Aussagen gelten für $3, 1 - \sqrt{5}$ (dies darf im Folgenden ohne Beweis angenommen werden).

(d) Geben Sie für $6 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ zwei verschiedene Darstellungen in irreduzible Faktoren an und zeigen Sie, dass diese nicht zueinander assoziiert sind.

(e) Ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ein Hauptidealring?

(f) Es gilt $\mathrm{GGT}(6, 2 + 2\sqrt{-5}) = \emptyset$.

Aufgabe 45 (Irreduzibilität im Polynomraum, $4 = 1 + 1 + 2$ Bonuspunkte).
Sei K ein Körper und $f \in K[t]$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{grad}(f) \geq 2$, so gilt: f irreduzibel $\Rightarrow$ f hat keine Nullstelle in K.

(b) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{grad}(f) \in \{2, 3\}$, so gilt:

$$f \text{ irreduzibel} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ hat keine Nullstelle in } K.$$

(c) Bestimmen Sie alle irreduziblen Elemente $f \in F_2[t]$ mit $\mathrm{grad}(f) \leq 3$.

Aufgabe 46 (Anwendungen des Homomorphiesatzes, $5 = 2 + 3$ Bonuspunkte).

(a) Es sei $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der kommutative Ring mit 1, welcher durch komponentenweise Addition/Multiplikation entsteht. Zeigen Sie, dass

$$\varphi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto (p(0), p(1))$$

ein Ringhomomorphismus ist und folgern Sie $\mathbb{R}[t]/(t(t-1)) \cong \mathbb{R}^2$. Ist $\mathbb{R}[t]/(t(t-1))$ ein Körper?

(b) Die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$ ist als Unterring von $\mathbb{C}$ ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[t]/(t^2 - 2t + 6) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$. Ist $\mathbb{Q}[t]/(t^2 - 2t + 6)$ ein Körper?

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **11. Juli 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`